Université Lille I | Année 2008-2009
Master 2ème année | **Feuille 1**

Ensembles algébriques affines

Exercice 1 (Radical d'un idéal)

1. Soit I un idéal d'un anneau A. Si a^n et b^m sont dans I montrer que $(a+b)^{n+m} \in I$.
2. Montrer que $\operatorname{Rad} I$ est un idéal, et même un idéal radical.
3. Montrer qu'un idéal premier est radical.

Exercice 2 (Idéal maximal)
Montrer que si I est un idéal de A ($I \neq A$) alors il existe un idéal maximal M tel que $I \subset M \subset A$. En particulier tout anneau A contient un idéal maximal.
Indication : on pourra se limiter au cas où A est Noethérien. Pour le cas général utiliser le lemme de Zorn (qui est une version de l'axiome du choix) : Soit $\mathcal{S}$ est un système non-vide d'ensembles, tel que pour toute chaine $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \ldots$ de $\mathcal{S}$ l'union $\bigcup_i I_i$ est encore dans $\mathcal{S}$. Alors tout élément de $\mathcal{S}$ admet un élément maximal (pour l'inclusion).

Exercice 3
Considérer un idéal I dans un anneau R et $\pi : R \to R/I$ la projection canonique.

1. Montrer que pour chaque idéal $J' \subset R/I$ on a que $\pi^{-1}(J') = J$ contient I. Montrer que pour chaque idéal $J \subseteq R$ contenant I l'image $\pi(J)$ est un idéal et que ceci donne une bijection des idéaux de R/I et des idéaux de R contenant I.
2. Montrer que J' est un idéal radical si et seulement J l'est. Montrer les assertions analogues pour les propriétés d'être premier ou maximal.
3. Montrer que J' est engendré par un nombre fini d'éléments si J l'est. Montrer que R/I est Noethérien si R l'est déjà. Chaque anneau de la forme $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Noethérien.

Exercice 4
Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps infini. Alors un polynôme F de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ qui s'annule pour tous les points $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est déjà le polynôme zéro. *Indication :* Utiliser la récurrence sur le nombre de variables.

Exercice 5 (Corps finis)
Montrez que si $\mathbb{K}$ est un corps fini alors tous les sous-ensembles de $\mathbb{K}^n$ sont algébriques.

Exercice 6 (Ensembles algébriques de $\mathbb{K}$)
Montrez que les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{K}$ sont les ensembles finis et $\mathbb{K}$ lui-même.

Exercice 7
Montrez que l'ensemble
$$\left\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{K}^3 \mid t \in \mathbb{K}\right\}$$
est un ensemble algébrique.

Exercice 8
Montrez que les ensembles suivants ne sont pas algébriques :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(x)\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$. Ici $x \mapsto |x|$ est le module du nombre complexe $x \in \mathbb{C}$.
3. $\{(\cos(t), \sin(t), t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 9
Considérons un polynôme F dans l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.

1. Montrer qu'on peut écrire F sous la forme
$$F = \sum_{(i)} \lambda_{(i)} (X_1 - a_1)^{i_1} \ldots (X_n - a_n)^{i_n}$$
où les coefficients $\lambda_{(i)}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
2. Supposons qu'on a un point $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Alors on a
$$F = \sum_{i=0}^{n} (X_i - a_i) G_i$$
avec des polynômes G_i dans l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.
3. Montrez que l'idéal $I = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est maximal et que l'homomorphisme canonique $\mathbb{K} \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ est un isomorphisme.

Exercice 10
Montrez que pour un idéal $I \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ on a $V(I) = V(\mathrm{Rad}(I))$ et $\mathrm{Rad}(I) \subset I(V(I))$.

Exercice 11 (Topologie de Zariski)
Soit $F \subset \mathbb{K}^n$. F est un *fermé de Zariski* si F est un ensemble algébrique de $\mathbb{K}^n$. Un *ouvert de Zariski* est le complémentaire d'un fermé de Zariski. Montrer que l'on définit ainsi une topologie sur $\mathbb{K}^n$. Comparer-la avec la topologie usuelle (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exercice 12

1. Montrer que $V(y - x^2) \subset \mathbb{C}^2$ est irréductible et que $I(V(y - x^2)) = (y - x^2)$.
2. Donner les composantes irréductibles de l'ensemble algébrique
$$V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2.$$
3. Trouvez les composantes irréductibles de $V(y^2 - xy - x^2y + x^3)$ dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 13 (Ensembles algébriques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}^2$)

1. Montrer que tous les ensembles algébriques de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme $V(F)$ pour un polynôme $F \in \mathbb{R}[x, y]$.
2. Décrire les ensembles algébriques de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 14
Le théorème de zéros de Hilbert est-il vrai dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 15
Soit $R = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, où $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, et soit $V = V(I)$. Montrer qu'il y a une correspondance biunivoque entre les ensembles algébriques contenus dans V et les idéaux radicaux de R/I et que les sous-ensembles irréductibles et les points correspondent aux idéaux premiers et aux idéaux maximaux respectivement.

Exercice 16
A partir du théorème des zéros de Hilbert faible montrer le théorème des zéros de Hilbert fort.