
Révision

Nombres complexes et fonctions trigonométriques

- Exercice 1**
1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi}$.
 2. En déduire les expressions de $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ et $\tan 2\varphi$ en fonction de $\tan \varphi$.
 3. Calculer $\tan(\pi/8)$.

Exercice 2 Linéariser les fonctions g et h définies par $g(x) = \sin^5 x$ et $h(x) = \cos^3 x \cdot \sin^4 x$.

Exercice 3 Calculer $1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5}$ et en déduire la valeur de $1 + \cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5 + \cos 6\pi/5 + \cos 8\pi/5$. En déduire la valeur de $\cos 2\pi/5$.

Exercice 4 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$.

Suites

Exercice 5 Soit (u_n) une suite réelle. Dire si les énoncés suivants sont vrais, et sinon donner un contre-exemple :

1. Si (u_n) converge, alors elle est monotone.
2. Si (u_n) diverge, alors elle est monotone.
3. Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée.
4. Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Exercice 6 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et $l \in \mathbb{R}$. Discuter les assertions suivantes.

1. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
2. Si $(|u_n|)$ converge vers l , alors (u_n) converge vers l ou $-l$.
3. Si (u_n) converge vers l , alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
4. Si (u_n) est à termes strictement positifs et $\lim u_n = l$, alors l est strictement positif.
5. Si (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = 90$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = 150$. Quelle est sa raison ?

Exercice 8 On considère la suite positive (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ et (v_n) la suite définie par, $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Calculez la limite de la suite (v_n) , puis celle de (u_n) .

Comparaison de fonctions, équivalents et développements limités

Exercice 9 Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

1. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x$ au voisinage de $+\infty$
3. $x^{-\frac{1}{x}}$ et $\ln x$ au voisinage de 0.

Exercice 10 Trouver à l'aide d'équivalents les limites suivantes en 0 :

$$x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}, \quad \frac{(1-\cos x) \arctan x}{x \tan x}, \quad \frac{x \ln(1+x)}{(\arcsin x)^2}.$$

Exercice 11 Ecrire les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes $\frac{x+1}{x-2}$, $\sinh x \sin x$, $\frac{1}{(1+x)(1-x^4)}$, $\sin x \ln(1+x)$. Ecrire le développement limité de $\ln(1+\frac{x}{e})$ à l'ordre 2 en 0. En déduire le développement limité de $\ln x$ à l'ordre 2 en e .

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 12 1. Donner toutes les solutions définies sur \mathbb{R} des équations différentielles suivantes :

$$y' + 6y = x \quad y' - y = \sin x$$

2. Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y'' + y' - 6y = 0 & y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y'' + y = e^x & y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x) \end{array}$$