MISSA MINIMA

LIVIO FLAMINIO

RÉSUMÉ. Une petite introduction à la théorie des surfaces minimales. Nous présentons la représentation de Weierstrass-Enneper des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$ et si le temps nous le permet la solutions de Douglas du problème de Plateau.

1. INTROITUS : QU'EST-CE QU'UNE SURFACE MINIMALE ?

1.1. **Le problème de Plateau.** Les problèmes de la recherche d'objets géométriques optimaux par rapport à des conditions données ont une longue histoire. Déterminer parmi les figures planes d'un périmètre fixé celle d'aire maximale ; déterminer parmi les courbes planes celle qu'une bille sujette à la gravité parcourt en un temps minimal ; voilà des exemples de problèmes qui avaient déjà attiré l'attention des philosophes et mathématiciens grecs.

Il ne s'agit pas de questions d'intérêt purement ou uniquement mathématique. Le principe que les lois fondamentales de la physique se puissent déduire du principe de minimisation de l'*action* s'établit déjà avec Maupertuis, Lagrange, D'Alembert et il règne souverain dans la physique du 20ème siècle ; au point que pour les physiciens d'aujourd'hui une "théorie" c'est tout simplement le choix d'une fonction d'action.

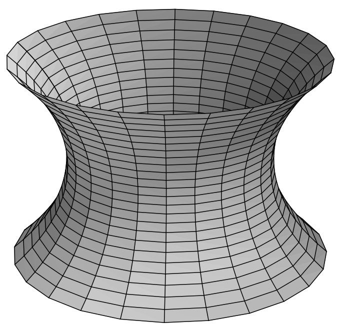
Le problème de Plateau se formule ainsi : étant donnée une ou plusieurs courbes fermées dans l'espace, déterminer la surface qui s'appuie sur ces courbes[1] et qui possède la plus petite aire. On observe facilement ces surfaces dans la nature : puisque l'énergie d'une fine pellicule d'eau savonnée est proportionnelle à l'aire de la pellicule, et puisque ces pellicules prennent la forme qui minimise l'énergie, on peut obtenir des modèles physiques de nos surfaces en immergeant des fils de fer à la forme des courbes données dans l'eau savonneuse : en les sortantant de l'eau les "bulles" de savon qui s'appuient sur les fils de fer forment des surfaces, solutions du problème de Plateau.

Date: 7 novembre 2003.

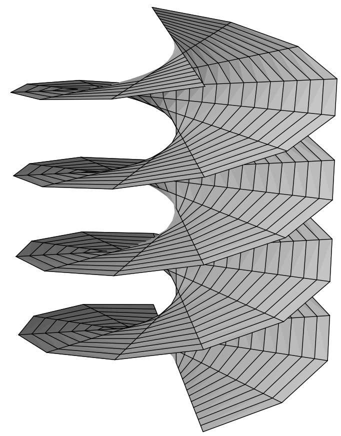
[1] c'est-à-dire la surface dont la frontière est formée par ces courbes

1.2. **Définitions.** Les surfaces minimales que nous considérerons sont des surfaces qui minimisent l'aire[2] *localement*. Précisément :

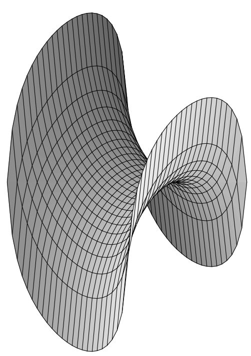
Definition 1.1. Une surface S dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est *minimale* si tout point $p \in S$ possède un voisinage $U \subset S$, qui est la surface de moindre aire parmi les surfaces de même frontière ∂U.



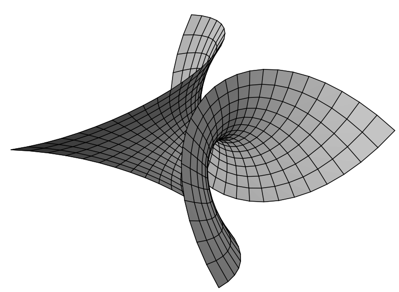
(a) La caténoïde d'équation $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.



(b) L'hélice d'équation $y \tan z = x$.



(c) La surface de Scherk : $\cos y \, e^z = \cos x$.

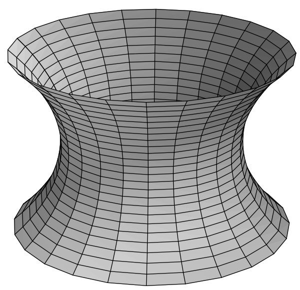


(d) La surface d'Enneper : $x = \Re(w - w^3/3)$, $y = \Re i(w + w^3/3)$, $z = \Re w^3$.

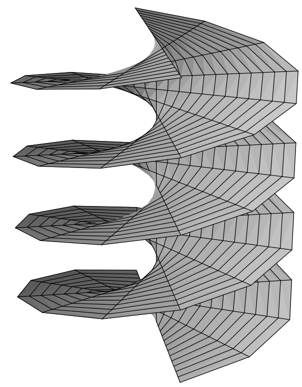
FIG. 1. Quelques exemples de surfaces minimales

[2]Pour pouvoir définir l'aire on peut se limiter à considérer des surfaces rectifiables, par exemple C^1 par morceaux ; toutefois nous supposerons que nos surfaces sont C^2 et possèdent en chaque point une normale non nulle.

Il est intuitivement clair que si les normales à la surface sont toutes divergentes, (c'est le cas d'une sphère ou d'un oeuf), en poussant la surface dans la direction des normales, on pourra élargir son aire (penser à un ballon qui se gonfle). Donc pour qu'une surface soit minimale il faut que les normales soient convergentes dans certaines directions et divergentes dans d'autres ; en d'autres termes, il faut qu'au voisinage de chaque point, la surface ressemble à un col.



(a) Si les normales divergent, en poussant dans la direction des normales on augmente l'aire



(b) Dans un col, en poussant un petit carré dans la direction normale, un coté du carré s'agrandit et l'autre se rétrécit.

Cette observation peut être rendue beaucoup plus précise en introduisant les courbures principales en un point d'une surface.

Soit S une surface C^2 et $p \in S$. Choisissons un système de coordonnées orthogonal (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ de façon que p soit à l'origine et que le plan (xy) coïncide avec le plan tangent à S en p. La surface S au voisinage de p est le graphe d'une fonction $h : (x, y) \mapsto h(x, y)$ définie au voisinage de $(0, 0)$. Vu que p est à l'origine et que le plan (xy) coïncide avec le plan tangent à S en p, la fonction h et ses premières dérivées sont nulles en $(0, 0)$; la fonction h a donc un développement limité :

$$\begin{aligned} h(x, y) &= a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + o(x^2 + y^2) \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)}$$

est la matrice "hessienne" de h en $(0,0)$. Cette matrice étant symétrique, elle est diagonalisable avec valeurs propres k_1 et k_2 réelles et une base orthogonale de vecteurs propres. Après une éventuelle rotation des axes (x,y), on peut donc supposer que la matrice hessienne est diagonale :

$$h(x,y) = k_1\, x^2 + k_2\, y^2 + o(x^2 + y^2).$$

Definition 1.2. Les valeurs propres k_1 et k_2 de la matrice hessienne définie ci-dessus sont dites les *courbures principales* de S en p. Les directions propres de la matrice hessienne sont dites les *directions principales* de S en p. On définit aussi la *courbure gaussienne* $k_p = k_1 k_2$ et la *courbure moyenne* $H_p = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ en p.

Proposition 1.3. *Une surface S est minimale si et seulement si sa courbure moyenne H_p s'annule en tout $p \in S$.*

On a rendu quantitative l'intuition précédente : une surface est minimale si et seulement si elle est également concave et convexe en deux directions orthogonales en tout point.

Pour exprimer la condition "courbure moyenne nulle" en toute généralité, rappelons quelques éléments sur les surfaces paramétrées.

Soit S une surface d'équations paramétriques $X(u,v)$, où les paramètres u et v parcourent un certain domaine D et $X(u,v) \in \mathbb{R}^3$. Le plan tangent à S au point (u,v) est engendré par les deux vecteurs $X_u = \partial X/\partial u$ et $X_v = \partial X/\partial v$. La direction normale en ce point est donc $N(u,v) = X_u \wedge X_v$ et l'aire du parallélogramme de cotés X_u, X_v est $\parallel X_u \wedge X_v \parallel$; l'aire de S est donc

$$Aire(S) = \iint_D \parallel X_u \wedge X_v \parallel \, du\, dv \tag{1}$$

Si on pose

$$b_{uu} = X_{uu} \cdot N, \quad b_{uv} = X_{uv} \cdot N, \quad b_{vv} = X_{vv} \cdot N$$

et

$$E = \parallel X_u \parallel^2, \quad F = X_u \cdot X_v, \quad G = \parallel X_v \parallel^2$$

un calcul qu'un retrouvera dans le premières pages de [Oss86] donne que la courbure moyenne est égale à

$$H(u,v) = \frac{b_{uu} G - 2F b_{uv} + b_{vv} E}{2(EG - F^2)};$$

cela nous dit qu'une surface est minimale si et seulement si

$$b_{uu}G - 2Fb_{uv} + b_{vv}E = 0.$$

Si on suppose que la surface est le graphe d'une fonction f définie sur un domaine D du plan, cette équation se simplifie un peu et elle dévient

$$(1 + |f_v|^2)f_{uu} - 2f_uf_vf_{uv} + (1 + |f_u|^2)f_{vv} = 0.$$

On voit alors que les surfaces minimales sont des solutions à une équation aux dérivées partielles non linéaire ; la recherche de solution à cette équation peut raisonnablement apparaître comme un problème un peu décourageant.

2. KYRIE : GAUSS INCIPIT

2.1. **Coordonnées isothermes.** On a vu qu'une surface dans $\mathbb{R}^3$ possède en chaque point deux directions privilégiées. La question naturelle est donc : existe-t-il des paramétrisations particulières des surfaces plus jolies que les autres ? On pourrait alors espérer alors que pour ces paramétrisations l'équation des surfaces minimales se simplifie suffisement pour qu'on puisse la résoudre.

La recherche de paramétrisations privilégiées c'est exactement la question que Gauss s'attacha dans ses travaux de géodésie.

En effet, la surface S pourrait être la terre et (u, v) une système de coordonnées tel que la longitude et la latitude ou, la longitude e la hauteur sur le plan équatorial etc. La représentation de la terre dans ces coordonnés comporte des déformations considérables et une question naturelle se pose : quelles sont les propriétés qu'une carte géographique peut respecter ? Dans un petit plan d'une maison ou d'une petite ville où, après un changement d'échelle, on peut supposer que distances, angles, aires etc. sont toutes des quantités préservées par le plan ; mais cela est uniquement dû à la petitesse de la région représentée. Gauss découvrit que seules les surfaces de courbures gaussienne nulle pouvaient être reproduite fidèlement sur une plan ; ici par reproduction "fidèle" nous entendons que, après un changement d'échelle, les distances (et par conséquent les angles et les aires) sont préservées. Il est aussi facile de voir que si un plan préserve les aires et les angles alors il préserve les distances aussi. Par conséquent, puisque la courbure gaussienne de la terre est non nulle, il n'y a pas moyen de faire un plan de la terre qui puisse contenter à la fois les généraux qui aimeraient savoir dans quelle direction lancer leurs boules de canon, et les grands propriétaires fonciers, qui aimeraient pouvoir mesurer sur le plan l'étendue de leurs possessions.

Les surfaces minimales aussi ont une courbure gaussienne non nulle (sauf les plans) ; donc toute paramétrisation doit trahir certaines propriétés géométriques de la surface. Mais peut-on avoir une paramétrisation qui respecte uniquement les angles ?

Si on suppose qu'une paramétrisation $X(u,v)$ d'une surface S préserve les angles, du fait que la droite u est perpendiculaire à la droite v dans le plan des paramètres (u,v), il découle que les vecteurs X_u et X_v, qui sont tangents aux images de ces droites sur S, doivent être perpendiculaires : donc $X_u \cdot X_v = 0$. En plus on doit avoir $\| X_u \| = \| X_v \|$ car les vecteurs $X_u - X_v$ et $X_u + X_v$ doivent (pour les mêmes raisons) être perpendiculaires aussi.

Definition 2.1. Une application différentiable qui préserve les angles est dite *application conforme*.

Definition 2.2. Une paramétrisation $X(u,v)$ d'une surface S est dite *un système de coordonnées isotherme* si

$$X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{et} \quad \| X_u \| = \| X_v \| .$$

Ceci équivaut à dire que la différentielle de X en (u,v) est une application du plan (u,v) sur le plan tangent à S en $X(u,v)$ qui dilate les distances par un facteur $\| X_u \| = \| X_v \|$ et donc ces conditions sont équivalents à dire que la paramétrisation $X(u,v)$ de la surface S est conforme.

La plus remarquable application conforme est certainement la paramétrisation de la sphère S^2 donnée par la projection stéréographique.

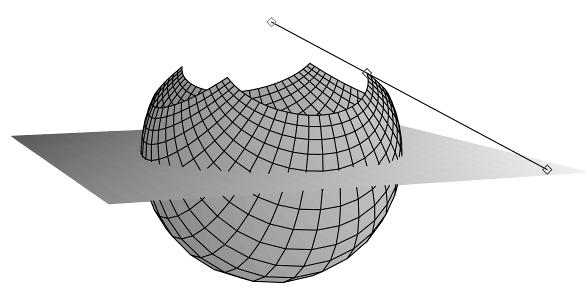


FIG. 2. La projection stéréographique

La projection indiquée dans la figure 2 est la projection stéréographique du pôle Nord NP donnée par l'application :

$$\text{St} : (x,y,z) \in S^2 \setminus \{\text{NP}\} \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C} \tag{2}$$

dont l'inverse est donnée par

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) \in S^2 \setminus \{\text{NP}\} \tag{3}$$

La grille qui apparaît sur la sphère dans la figure 2 correspond aux droites parallèles aux axes coordonnées.

2.2. **Qu'est-ce qu'une fonction analytique complexe ?** Soit f une fonction définie dans une partie ouverte du plan complexe et à valeurs complexes.

Definition 2.3. On dit que f est *analytique (complexe)* en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe la limite suivante existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{4}$$

On note $f'(z_0)$ cette limite. Une fonction analytique en tout point d'un domaine ouvert $D \subset \mathbb{C}$ est dite *analytique complexe ou holomorphe en* D.

Exemples de fonctions analytiques : les polynômes $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, les fonctions définies par des séries convergentes (e.g. $\sin$, $\cos$, $\exp$), les inverses (locales) des fonctions analytiques.

Soit f analytique complexe ; si on pose $z = u + iv$ et on regarde f comme une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ alors en fixant $v = v_0$ et $u = u_0$ dans la limite $\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \frac{f(u,v)-f(u_0,v_0)}{(u-u_0)+i(v-v_0)}$ on obtient

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

ou bien

$$\frac{\partial f}{\partial v} = i \frac{\partial f}{\partial u} \tag{5}$$

et en décomposant f en sa partie réelle et imaginaire $f = F + iG$, on peut en déduire

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{6}$$

Les équations (5) ou (6) sont dites les équations de Cauchy-Riemann. Elles sont équivalentes à la définition 2.3.

Observons que les équations de Cauchy-Riemann (6) nous disent que si on regarde f comme l'application $(u,v) \mapsto (F(u,v), G(u,v))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ alors sa matrice jacobienne a la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};$$

si on pose $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$ on voit que la matrice jacobienne est la composition d'une homothétie de rapport ρ et d'une rotation d'angle θ. On a donc :

Proposition 2.4. *Une application d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est analytique complexe si et seulement si elle est une application conforme qui préserve l'orientation de $\mathbb{C}$.*

Une autre propriété sympathique des fonctions holomorphes peut être découverte si on se souvient des propriétés de l'intégration des formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$. Rappelons qu'une forme différentielle (de dégré 1) sur le plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (u,v) est un animal qui s'écrit $\omega = A(u,v)\,du + B(u,v)\,dv$. Nous pouvons intégrer cette forme le long d'un chemin γ du plan en donnant une paramétrisation $(u(t),v(t))_{t=a}^{b}$ de γ. On pose alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(A\big(u(t),v(t)\big)\,\frac{du}{dt} + B\big(u(t),v(t)\big)\,\frac{dv}{dt}\right)\,dt$$

et on vérifie que le membre de droite ne dépend pas du choix de la paramétrisation de γ (conséquence immédiate de la formule de changement de variables dans une intégrale).

Le lecteur se souviendra aussi que s'il existe une fonction ϕ telle que $A = \frac{\partial\phi}{\partial u}$ et $B = \frac{\partial\phi}{\partial v}$ alors $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités de γ (et elle est égale à la différence des valeurs de ϕ aux extrémités de γ). Dans ce cas on dit que ω est *exacte*.

Un théorème d'attribution douteuse dit aussi que si [3] $\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} = 0$ dans une région D alors $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega$ pour toute couple de chemins γ et γ_1 ayant les mêmes extrémités et pouvant se déformer par continuité de l'un en l'autre (sans sortir de la région D). Dans ce cas on dit que ω est *fermée*.

Soit $z = u + iv$, et soit $f = F + iG$ une fonction de z, holomorphe dans D. Considérons la forme différentielle $f(z)\,dz$. En développant on a

$$f(z)\,dz = (F+iG)(du+i\,dv) = (Fdu - Gdv) + i(Gdu + Fdv) = \omega_1 + i\omega_2.$$

On reconnaît maintenant que les équations de Cauchy-Riemann (6) sont équivalents à dire que les formes différentielles ω_1 et ω_2, qui forment la partie réelle et imaginaire de $f(z)\,dz$ sont fermées. On a donc

Proposition 2.5. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine ouvert D. Pour toute couple de chemins γ et γ_1 dans D ayant les mêmes extrémités et pouvant se déformer de l'un en l'autre tout en restant dans D, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

[3] cette condition s'exprime en disant que le rotationnel de ω est nul

En particulier si γ peut se déformer en un point tout en restant dans D on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

3. Gloria : À quoi sert tout cela ?

3.1. **La représentation de Weierstrass-Enneper d'une surface minimale.** Il semblerait que nous nous soyons éloignés considérablement de notre premier objet d'intérêt : les surfaces minimales. Quelle est la connexion entre surfaces minimales, application conformes et fonctions holomorphes ?

Le premier lien a été établi par Gauss lui-même :

Theorem 3.1 (Existence des coordonnées isothermes)**.** *Toute surface S admet une paramétrisation (locale) par des coordonnées isothermes.*

Grâce au coordonnées isothermes, les équations d'une surface minimale se simplifient considérablement. Soit $X(u,v)$ une paramétrisation isotherme d'une surface minimale S ; puisque

$$X_u \cdot X_v = 0, \qquad \| X_u \| \,=\, \| X_v \| \tag{7}$$

la condition de minimalité de la surface donne

$$X_{uu} + X_{vv} = 0. \tag{8}$$

Posons

$$\Phi = X_u - i\,X_v = \frac{\partial X}{\partial u} - i\frac{\partial X}{\partial v}. \tag{9}$$

Alors, en utilisant (8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = X_{uv} - iX_{vv} = X_{vu} + iX_{uu} = i\frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

nous obtenons que Φ est une fonction holomorphe [4] de $z = u + iv$! De plus

$$\Phi \cdot \Phi = (X_u - i\,X_v)\cdot(X_u - i\,X_v) = \| X_u \|^2 - \| X_v \|^2 - 2iX_u \cdot X_v$$

et en utilisant (7)

$$\Phi \cdot \Phi = 0 \tag{10}$$

et

$$\overline{\Phi} \cdot \Phi = \| X_u \|^2 + \| X_v \|^2 \tag{11}$$

Remarquons qu'un changement de paramètre conforme (u', v'), de même orientation que (u,v), nous donne une autre base $X_{u'}, X_{v'}$ de l'espace tangent à S en $X(u,v)$. Cette nouvelle base, par définition de la conformité,

[4] en réalité $\Phi(z) \in \mathbb{C}^3$; nous entendons que chacune des trois composantes est une fonction holomorphe de z.

s'obtient à partir de X_u, X_v, par rotation et dilatation ; donc si $\Phi' = X_{u'} - i\,X_{v'}$, on a $\Phi'(z') = c(z)\Phi(z)$ où $c(z)$ est une fonction complexe non nulle et holomorphe. Nous sommes maintenant au comble du bonheur car Φ, à un multiple scalaire près, ne dépend pas du paramètre conforme choisi ! Elle est donc une application (holomorphe) de la surface S dans l'espace $\mathbb{C}P^2$ des droites (complexes) de $\mathbb{C}^3$! ! ! Cette application est dite l'*application de Gauss de la surface*.

Si cela vous semble un jeu d'acrobatie et que vous êtes un peu perdu, courage ! Ne désespérez pas, nous verrons bientôt une autre façon de regarder l'application de Gauss, plus élémentaire mais équivalente. Pour l'instant, nous voulons profiter de ce que nous avons acquis. Le fait le plus significatif est que si nous connaissons la fonction $\Phi(z)$, alors nous pouvons retrouver [5] la paramétrisation $X(u, v)$ de la surface. En effet, puisque $dX = X_u\,du + X_v\,dv = \Re(\Phi\,dz)$, en intégrant dX le long un chemin de $z_0 = u_0 + iv_0$ à $z = u + iv$ on a :

$$X(u, v) = X(u_0, v_0) + \Re \int_{z_0}^{z} \Phi\,dz. \tag{12}$$

Réciproquement, si on se donne une fonction holomorphe $\Phi(z)$ dans un domaine D à valeurs dans $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ satisfaisant la relation (10), nous pouvons définir via la formule (12) une surface minimale.

Mais on peut faire plus ! Supposons que $\Phi(z) = (\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z))$ satisfait (10) , i.e.

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \tag{13}$$

Supposons[6] que ϕ_1 ne soit pas identiquement égale à $i\phi_2$ en D et posons $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$; en substituant $\phi_3 = g(\phi_1 - i\phi_2)$ dans (13) on trouve $\phi_1^2 + \phi_2^2 + g^2(\phi_1 - i\phi_2)^2 = 0$ qui se simplifie en $(\phi_1 + i\phi_2) + g^2(\phi_1 - i\phi_2) = 0$ ou bien

$$\frac{\phi_1}{1 - g^2} = -i\frac{\phi_2}{1 + g^2};$$

donc si on pose $w = 2\phi_1/(1 - g^2)$ on aura

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2}\,w\,(1 - g^2) \\ \phi_2 = \frac{i}{2}\,w\,(1 + g^2) \\ \phi_3 = gw \end{cases} \tag{14}$$

où la troisième s'obtient des deux autres en remarquant que celles-ci entraînent $w = \phi_1 - i\phi_2$ (ce que nous dit aussi que w est holomorphe !). Donc

---

[5] à une translation près

[6] si $\phi_1 \equiv i\phi_2$ identiquement en D alors $\phi_3 \equiv 0$ et la surface est contenue dans un plan $X_3 = const$, un cas qu'on peut oublier.

toutes les solutions de l'équation (13) s'expriment au moyen de deux fonctions (w, g) via les formules (14), où w est une fonction holomorphe et g est une fonction méromorphe (i.e quotient de deux fonctions holomorphes). Réciproquement, si on se donne deux fonctions (w, g), la première holomorphe et la deuxième méromorphe et si le produit wg^2 est holomorphe[7] alors les fonctions ϕ_i définies via les formules (14) satisfont (13) (vérification facile) et on obtient une paramétrisation conforme d'une surface minimale via les formules (12)

On a maintenant mis en place une véritable usine à surfaces minimales ! Cette usine (14)-(12) prend le nom de *représentation de Weierstrass-Enneper des surface minimales*.

3.2. **L'application de Gauss révisitée.** À chaque point d'une surface paramétrée $X(u, v)$ on peut associer la normale N qui forme un trièdre positivement orienté avec la base (X_u, X_v) de l'espace tangent à la surface en ce point. Cette normale est donnée par $N(u, v) = X_u \wedge X_v / \parallel X_u \wedge X_v \parallel$.

Évidemment la normale ne dépend pas du paramétrage utilisé pour la définir et elle contient exactement toute l'information géométrique de la fonction Φ. L'application que à chaque point associe sa normale est donc une autre version de l'application de Gauss. Posons comme d'habitude $z = u+iv$; nous pouvons exprimer $N(u, v) = N(z)$ en fonction de $\Phi(z)$ comme il suit.

Les relations (7) impliquent que $\parallel X_u \wedge X_v \parallel = \parallel X_u \parallel \ \parallel X_v \parallel = \parallel X_u \parallel^2$ et la définition (9) de Φ nous donne $X_u = (\Phi + \overline{\Phi})/2$, $X_v = i(\Phi + \overline{\Phi})/2$; donc

$$N = \frac{1}{i} \frac{\Phi \wedge \overline{\Phi}}{\Phi \cdot \overline{\Phi}} \tag{15}$$

En utilisant la représentation de Weierstrass-Enneper (14) on pourra maintenant calculer N en fonctions de (w, g). Après un long calcul on trouve :

$$N = \left(\frac{2\Re(g)}{1+|g|^2}, \frac{2\Im(g)}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2} \right)$$

Finalement puisque l'application de Gauss que nous venons de redéfinir est à valeurs dans la sphère unité S^2, nous pouvons la composer avec la projection stéréographique et nous obtiendrons une fonction ν holomorphe du domaine D des paramètres dans $\mathbb{C}$. Quelle est cette fonction ? En utilisant la formule (3) on obtient :

$$\nu = \mathrm{St} \circ N = g \qquad !!!!!!$$

Merci d'observer une minute de contemplation.

[7]Techniquement cela signifie que w doit avoir une zéro d'ordre $2k$ en tout point où g a une pôle d'ordre k

4. SANCTUS : RETOUR AU PROBLÈME DE PLATEAU.

5. ITE MISSA EST.

Dans la rédaction de ces notes j'ai pris inspiration des notes de Nick Korevaar disponibles sur le WWW ; les notes de Nick étaient évidemment influencée par le livre [Opr00] de John Oprea. Mes sources principales ont été deux chefs-d'oeuvre dont je reccomande vivement la lecture, le livre de Bob Osserman déjà cité [Oss86] et celui de Blaine Lawson [Law80] où on pourra trouver une superbe présentation de la preuve du théorème de Rado-Douglas.

RÉFÉRENCES

[Law80] H. Blaine Lawson, Jr., *Lectures on minimal submanifolds. Vol. I*, second ed., Mathematics Lecture Series, vol. 9, Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1980. MR 82d :53035b

[Opr00] John Oprea, *The mathematics of soap films : explorations with Maple®*, Student Mathematical Library, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR 2002c :53013

[Oss86] Robert Osserman, *A survey of minimal surfaces*, second ed., Dover Publications Inc., New York, 1986. MR 87j :53012

UNIVERSITÉ DE LILLE 1, F59655, VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE
E-mail address: livio.flaminio@agat.univ-lille1.fr