

PUB. IRMA, LILLE 1994
Vol. 34, N° I

Introduction à l'association *

CH. SUQUET

Laboratoire de Statistique et Probabilités
U.F.R. de Mathématiques, Bât. M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve D'Ascq Cedex France

Abstract

Des variables aléatoires sont dites associées lorsque la covariance de toute paire de fonctions croissantes de ces variables est positive. Nous présentons quelques importantes propriétés de cette forme de dépendance positive: inégalités, loi des grands nombres, théorème central limite, . . . mettant en évidence l'analogie avec l'indépendance.

AMS classifications: 60-01, 60E15, 60F05, 60F15, 62H20.

Mots clés: variables aléatoires associées, inégalités FKG, dépendance positive, statistiques d'ordre, inégalité de Kolmogorov, loi forte des grands nombres, théorème central limite.

*Preprint

1 Préliminaires

Ce texte est issu de deux exposés faits par l’auteur au sein du groupe d’étude lillois sur les variables dépendantes. Il s’agissait de présenter les propriétés principales d’une forme particulière de dépendance positive appelée association. Il va de soi que ce travail n’a aucune prétention à l’originalité. Notre but était de faire une synthèse accessible à des non spécialistes en essayant de dégager les idées clés de cette théorie. Pour les développements, nous renvoyons à la bibliographie et notamment à Newman [11].

Le concept d’association pour des variables aléatoires a deux origines. L’une est la physique mathématique avec les inégalités FKG (Fortuin, Kasteleyn et Ginibre [6]) et leurs applications en théorie de la percolation, au modèle d’Ising, . . . L’autre est la statistique (Lehman [9] puis Esary, Proschan et Walkup [5]) avec des applications en fiabilité. L’association se définit de la manière suivante:

Définition 1 Une application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est dite croissante si pour tout $i = 1, \dots, n$, l’application:

$$t \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est croissante sur \mathbb{R} .

Définition 2 Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est dit associé si:

$$\text{Cov}(f(X), g(Y)) \geq 0 \tag{1}$$

pour toute paire de fonctions croissantes f, g de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telles que la covariance ci-dessus existe.

Dans tout ce qui suit, cette hypothèse d’existence de la covariance sera systématiquement sous entendue. Remarquons que dans la définition de l’association, on peut remplacer *paire de fonctions croissantes* par *paire de fonctions décroissantes* puisque $\text{Cov}(f(X), g(Y)) = \text{Cov}(-f(X), -g(Y))$. Dans le langage de la physique mathématique, l’expression *associé* se traduit par *vérifiant les inégalités FKG*.

2 Propriétés constructives

En suivant Esary, Proschan et Walkup [5], nous présentons dans cette section quelques propriétés basiques de l’association.

Propriété 1 Tout sous ensemble d’un ensemble fini de variables aléatoires réelles associées est encore associé.

Preuve : Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur associé, il en est de même pour $X_\sigma = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$, σ désignant une permutation quelconque sur les indices $1, \dots, n$. On a donc le droit de parler d’*ensemble* de variables associées au lieu de vecteur. La vérification de la propriété est alors immédiate en prenant des fonctions croissantes f, g ne dépendant que des variables du sous-ensemble. ■

Cette propriété permet l'extension de la définition de l'association aux ensembles infinis de variables aléatoires:

Définition 3 *On dit qu'une famille infinie de variables aléatoires réelles est associée si toute sous-famille finie est associée.*

Propriété 2 *Si deux ensembles de variables associées sont indépendants l'un de l'autre, leur union est un ensemble associé.*

Preuve : Soient f et g applications croissantes de \mathbb{R}^{n+k} dans \mathbb{R} et:

$$Z = (X, Y) = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k)$$

Notons $U = f(Z)$ et $V = g(Z)$. Il s'agit de vérifier la positivité de $\text{Cov}(U, V)$. Pour alléger les écritures, nous noterons pour $W = h(Z)$:

$$E_{X,Y}(W) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} h(x, y) P_{X,Y}(dx, dy), \quad E_Y(W) = \int_{\mathbb{R}^k} h(x, y) P_Y(dx, dy), \dots$$

En raison de l'indépendance de X et Y , on a $P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$, d'où: $E_{X,Y}(W) = E_X(E_Y(W))$. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= E_{X,Y}(UV) - [E_{X,Y}(U)][E_{X,Y}(V)] \\ &= E_X[E_Y(UV)] - E_X[(E_Y U)(E_Y V)] \\ &\quad + E_X[(E_Y U)(E_Y V)] - [E_X(E_Y U)][E_X(E_Y V)] \\ &= +E_X[\text{Cov}_Y(U, V)] + \text{Cov}_X(E_Y U, E_Y V) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est croissante sur \mathbb{R}^k et de même pour g . Le vecteur Y étant associé, on en déduit la positivité de $\text{Cov}_Y(f(x, Y), g(x, Y))$ puis celle de $E_X[\text{Cov}_Y(U, V)]$. D'autre part l'application $x \mapsto E_Y f(x, Y)$ est croissante sur \mathbb{R}^n et de même pour g , X étant associé, la positivité de $\text{Cov}_X(E_Y U, E_Y V)$ en découle. ■

Propriété 3 *Tout singleton formé d'une variable aléatoire réelle est associé.*

Cette propriété sera démontrée à la section 4. Elle entraîne avec la précédente l'association de tout ensemble de variables aléatoires indépendantes.

Propriété 4 *Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associé et si f_1, \dots, f_k sont des fonctions toutes croissantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} (ou toutes décroissantes), alors le vecteur $Y = (f_1(X), \dots, f_k(X))$ est associé.*

La preuve est immédiate.

Propriété 5 *Si $X^{(k)} = (X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$ est associé pour tout k et si $X^{(k)}$ converge en loi vers $X = (X_1, \dots, X_n)$ lorsque k tend vers $+\infty$, alors X est associé.*

La preuve sera donnée à la section 4.

3 Exemples

Nous sommes maintenant en mesure de donner des exemples de vecteurs associés. Les exemples 1 et 2 ci-dessous représentent en quelque sorte les deux situations extrémales de l'association.

Exemple 1: Soit Γ une courbe croissante dans \mathbb{R}^n , i.e. $\Gamma = \gamma([0, 1])$ où $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, chaque γ_i étant une application croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit X un vecteur aléatoire dont la loi est à support dans Γ (autrement dit, $X \in \Gamma$ p.s.). Alors X est associé.

Preuve : Examinons d'abord le cas particulier où le paramétrage γ est injectif. On peut alors définir la variable aléatoire $V = \gamma^{-1}(X)$. D'après la propriété 3, V est associée. Comme $X_i = \gamma_i(V)$, $i = 1, \dots, n$, la croissance des γ_i entraîne l'association de (X_1, \dots, X_n) grâce à la propriété 4.

Dans le cas général, pour $x \in \Gamma$, définissons $I_x = \{t \in [0, 1], \gamma(t) = x\}$. L'ensemble I_x est un intervalle éventuellement réduit à un singleton. En effet, si $s \in I_x$ et $t \in I_x$ avec $s < t$, en raison de la monotonie des γ_i , $\gamma(r) = x$ pour tout $r \in [s, t]$, donc $[s, t] \subset I_x$. Soit alors I le sous ensemble de $[0, 1]$ obtenu en ne conservant que le milieu de chaque intervalle I_x . La restriction $\tilde{\gamma}$ de γ à I est un paramétrage injectif de Γ et les $\tilde{\gamma}_i$ sont croissantes car chaque γ_i est constante sur chaque I_x . On est ainsi ramené au premier cas. ■

Exemple 2: Tout vecteur aléatoire à composantes indépendantes est associé.

Exemple 3: Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur associé et $Y = (X_{n:1}, \dots, X_{n:n})$ le vecteur de statistiques d'ordre engendré par X (Y est le réarrangement croissant des composantes de X : $X_{n:1} = \min_i X_i, \dots, X_{n:n} = \max_i X_i$). Alors Y est aussi associé grâce à la propriété 4.

Exemple 4: Pour X associé et $i = 1, \dots, n$, notons $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$. Alors le vecteur (S_1, \dots, S_n) des sommes partielles est associé par la propriété 4.

Exemple 5: Tout vecteur gaussien positivement corrélé X (i.e. $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$) est associé. Ce résultat est dû à Pitt (1982). Nous indiquons seulement le schéma de la preuve. On montre qu'il suffit de vérifier (1) pour des fonctions de test f et g C^1 à dérivées partielles bornées. En notant Z une copie indépendante de X , on définit pour tout $t \in [0, 1]$ le vecteur aléatoire $Y(t) = tX + \sqrt{1-t^2}Z$. Pour tout t , $Y(t)$ est gaussien avec même matrice de covariance que X et $\text{Cov}(X_i, Y_j(t)) = t\sigma_{ij}$. Posons $F(t) = \text{E}(f(X)g(Y(t)))$. On remarque que F est continue, $F(0) = \text{E}f(X)\text{E}g(X)$, $F(1) = \text{E}(f(X)g(X))$. Il suffit donc de montrer que F est dérivable et que F' est positive sur $]0, 1[$.

4 Critères d'association

Pour vérifier l'association d'un vecteur aléatoire, il peut être commode de disposer de caractérisations où les fonctions de test f, g de la définition 2 appartiennent à une classe de fonctions particulière. Nous montrons dans cette section qu'on peut se

contenter de vérifier (1) pour les fonctions croissantes binaires ou pour les fonctions croissantes continues bornées.

4.1 Représentation intégrale de la covariance

Le lemme suivant qui établit une relation entre la covariance de deux variables et celle d'indicatrices joue un rôle clé dans tout ce qui suit.

Lemme 1 (Hoeffding) *Si X et Y sont des variables aléatoires réelles de carré intégrable, on a :*

$$E(XY) - E X E Y = \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy \quad (2)$$

où $F_{X,Y}$, F_X , F_Y désignent respectivement les fonctions de répartition du couple (X, Y) et de ses marginales.

Avant de donner la démonstration, remarquons que le second membre de (2) peut s'écrire de deux façons comme intégrale d'une covariance d'indicatrices ainsi qu'il résulte du calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y) &= P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ &= E(\mathbb{I}_{\{X \leq x\}} \mathbb{I}_{\{Y \leq y\}}) - E(\mathbb{I}_{\{X \leq x\}}) E(\mathbb{I}_{\{Y \leq y\}}) \\ &= \text{Cov}(\mathbb{I}_{\{X \leq x\}}, \mathbb{I}_{\{Y \leq y\}}) \\ &= \text{Cov}(1 - \mathbb{I}_{\{X > x\}}, 1 - \mathbb{I}_{\{Y > y\}}) \\ &= \text{Cov}(\mathbb{I}_{\{X > x\}}, \mathbb{I}_{\{Y > y\}}) \\ &= P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y) \end{aligned}$$

Une conséquence de (2) est que deux variables aléatoires réelles associées X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X, Y) = 0$. En effet, dans ce cas le calcul ci dessus et (2) donnent $F_{X,Y} - F_X F_Y \geq 0$, puis $F_{X,Y} = F_X F_Y$ presque partout et des fonctions de répartition égales presque partout sont égales partout.

Preuve : Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux copies indépendantes de (X, Y) . D'une part on a :

$$A = E[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] = 2[E(X_1 Y_1) - E(X_1) E(Y_1)]$$

d'autre part en interprétant $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$ comme l'aire algébrique d'un rectangle :

$$A = E \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbb{I}_{]-\infty, X_1]}(x) - \mathbb{I}_{]-\infty, X_2]}(x)) (\mathbb{I}_{]-\infty, Y_1]}(y) - \mathbb{I}_{]-\infty, Y_2]}(y)) dx dy$$

On justifie l'utilisation du théorème de Fubini en écrivant la même représentation pour $E |(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)|$, ce qui revient à remplacer les différences d'indicatrices

dans l'intégrale sur \mathbb{R}^2 par leurs valeurs absolues. Comme X_1, \dots, Y_2 ont des moments d'ordre 2, cette dernière intégrale est finie. Après permutation de l'espérance et de l'intégration dans la représentation de A , il vient:

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} 2(F_{X,Y}(x,y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy$$

■

4.2 Caractérisation par les fonctions binaires

Théorème 1 *Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associé si et seulement s'il vérifie $\text{Cov}(\gamma(X), \delta(X)) \geq 0$ pour toute paire de fonctions croissantes γ, δ de \mathbb{R}^n dans $\{0, 1\}$.*

Preuve : Soient f et g deux fonctions croissantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Par le lemme d'Hoeffding on a:

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Cov}(\mathbb{1}_{\{f(X) > s\}}, \mathbb{1}_{\{g(X) > t\}}) ds dt$$

Pour s fixé, la fonction:

$$\gamma_s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0, 1\} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \mathbb{1}_{\{f(x_1, \dots, x_n) > s\}}$$

est croissante sur \mathbb{R}^n et de même pour δ_t définie avec g à la place de f et t à celle de s . La positivité de la covariance pour des fonctions de test croissantes binaires γ, δ implique donc celle de $\text{Cov}(f(X), g(X))$. ■

Nous pouvons maintenant démontrer que tout singleton est associé.

Preuve de la propriété 3: Il suffit de vérifier la positivité de $\text{Cov}(\gamma(X), \delta(X))$ pour toute variable aléatoire réelle X et toute paire de fonctions croissantes $\gamma, \delta: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$. Or ces fonctions sont des indicatrices d'intervalles du type $]a, +\infty[$ (ouverts ou fermés en a selon que la fonction est continue à gauche ou à droite en ce point). On a donc $\gamma \leq \delta$ ou $\delta \leq \gamma$. Il suffit de traiter le cas $\gamma \leq \delta$. Alors $\gamma\delta = \gamma^2 = \gamma$ d'où:

$$\text{E}(\gamma(X)\delta(X)) - \text{E}\gamma(X)\text{E}\delta(X) = \text{E}\gamma(X) - \text{E}\gamma(X)\text{E}\delta(X) = \text{E}(\gamma(X))(1 - \text{E}\delta(X))$$

Cette dernière quantité est visiblement positive. ■

4.3 Caractérisation par les fonctions continues bornées

Théorème 2 *Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associé si et seulement s'il vérifie $\text{Cov}(u(X), v(X)) \geq 0$ pour toute paire de fonctions croissantes continues bornées u, v de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .*

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant:

Lemme 2 *Si $\text{Cov}(u(X), v(X)) \geq 0$ pour toute paire de fonctions croissantes continues bornées u, v de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , alors $\text{Cov}(\varphi(X), \psi(X)) \geq 0$ pour toute paire de fonctions φ, ψ de \mathbb{R}^n dans $\{0, 1\}$, croissantes et continues à droite.*

Preuve : On montre que φ est limite simple sur \mathbb{R}^n d'une suite $(u^{(k)})$ de fonctions continues, croissantes et uniformément bornées. Cette suite est définie par:

$$u^{(k)}(x) = [1 - kd(x, A)]^+ \quad A = \varphi^{-1}(\{1\})$$

où d désigne la distance euclidienne et $[\]^+$ la partie positive d'une fonction. On définit de même $(v^{(k)})$ à partir de ψ . Le théorème de convergence dominée nous donne alors: $\text{Cov}(\varphi(X), \psi(X)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Cov}(u^{(k)}(X), v^{(k)}(X))$, ce qui permet de conclure. Justifions maintenant les affirmations précédentes. Il est clair que chaque $u^{(k)}$ est continue, positive, bornée par 1. D'autre part la suite de fonctions $(u^{(k)})$ converge vers l'indicatrice de la fermeture de A . Il faut donc prouver que A est fermé pour établir la convergence de $u^{(k)}$ vers φ . On note \preceq la relation d'ordre partiel sur \mathbb{R}^n :

$$(x_1, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_n) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \leq y_i$$

La croissance de φ se caractérise par: $x \preceq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$. La continuité à droite de φ au point $z \in \mathbb{R}^n$ se définit par: $\lim_{x \rightarrow z, z \preceq x} \varphi(x) = \varphi(z)$. En raison de la croissance

de φ , si $x \in A$ et $x \preceq y$, alors $y \in A$. Soit alors z limite d'une suite $(x^{(k)})$ d'éléments de A . On peut remplacer $(x^{(k)})$ par une suite $(y^{(k)})$ vérifiant les trois conditions: (i) $x^{(k)} \preceq y^{(k)}$ (et donc $y^{(k)} \in A$), (ii) $z \preceq y^{(k)}$ et (iii) $d(z, y^{(k)}) = d(z, x^{(k)})$. Sous ces trois conditions, $\varphi(z)$ est limite à droite de $\varphi(y^{(k)})$ et donc z est dans A par continuité à droite de φ . Pour construire $y^{(k)}$, il suffit de prendre pour $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{x_i^{(k)} + y_i^{(k)}}{2} = z_i \quad \text{si } x_i^{(k)} < z_i, \quad y_i^{(k)} = x_i^{(k)} \quad \text{sinon.}$$

Finalement, il reste à vérifier la croissance de chaque fonction $u^{(k)}$, ce qui revient à montrer la décroissance de $x \mapsto d(x, A)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z_ε dans A tel que: $d(x, z_\varepsilon) \leq d(x, A) + \varepsilon$. Pour $y \succeq x$, posons $z'_\varepsilon = z_\varepsilon + (y - x)$. Ainsi $z_\varepsilon \preceq z'_\varepsilon$ et z'_ε est dans A . D'autre part, $d(y, z'_\varepsilon) = d(x, z_\varepsilon)$. On en déduit: $d(y, z'_\varepsilon) \leq d(x, A) + \varepsilon$, puis $d(y, A) \leq d(x, A) + \varepsilon$. Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $d(y, A) \leq d(x, A)$ pour $x \preceq y$. ■

Preuve du théorème : Notons P la loi de X , γ et δ deux fonctions binaires croissantes sur \mathbb{R}^n . Soient $A = \gamma^{-1}(\{1\})$ et $B = \delta^{-1}(\{1\})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact C inclus dans A tel que $P(C) + \varepsilon \geq P(A)$. On définit alors $\tilde{C} = \{c + t \mid c \in C, t \succeq 0\}$. Comme γ est croissante, \tilde{C} est inclus dans A . D'autre part, \tilde{C} est fermé. En effet, soit $(c^{(k)} + t^{(k)})$ une suite de points de \tilde{C} convergeant

vers a . Par compacité de C , $(c^{(k)})$ a une sous-suite $(c^{(k_j)})$ convergeant vers $b \in C$. Alors $(t^{(k_j)})$ converge vers $a - b$ donc $a - b \succeq 0$ et $a \in \tilde{C}$. L'indicatrice φ de \tilde{C} est une fonction binaire minorant γ . Comme pour tout $x \in \tilde{C}$, \tilde{C} contient tous les points $y \succeq x$, φ est croissante. La même propriété de \tilde{C} implique la continuité à droite de φ en tout point de \tilde{C} . Comme \tilde{C} est fermé, φ est aussi continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{C}$. On construit de même une fonction binaire ψ à partir de δ . D'après le lemme, on a $\text{Cov}(\varphi(X), \psi(X)) \geq 0$. De $\varphi \leq \gamma$ et $\psi \leq \delta$ on déduit: $\text{E} \gamma(X) \delta(X) \geq \text{E} \varphi(X) \psi(X)$. D'autre part, $P(A) \leq P(\tilde{C}) + \varepsilon$ implique: $\text{E} \gamma(X) \leq \text{E} \varphi(X) + \varepsilon$ et on a une inégalité analogue avec δ et ψ . Il en résulte:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\gamma(X), \delta(X)) &\geq \text{E} \varphi(X) \psi(X) - (\text{E} \varphi(X) + \varepsilon)(\text{E} \psi(X) + \varepsilon) \\ &\geq \text{Cov}(\varphi(X), \psi(X)) - 2\varepsilon - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Et on conclut en faisant tendre ε vers 0. ■

Le théorème 2 nous permet de prouver que l'association est conservée par la convergence en loi.

Preuve de la propriété 5 : Soit $(X^{(k)})$ une suite de vecteurs associés convergeant en loi vers le vecteur aléatoire X . Pour toute paire u, v de fonctions croissantes continues bornées et tout $k \in \mathbb{N}$ on a donc: $\text{Cov}(u(X^{(k)}), v(X^{(k)})) \geq 0$. Les fonctions u, v, uv étant continues bornées, la définition de la convergence en loi donne immédiatement:

$$\text{Cov}(u(X), v(X)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \{ \text{E} u(X^{(k)}) v(X^{(k)}) - \text{E} u(X^{(k)}) \text{E} v(X^{(k)}) \} \geq 0$$
■

5 Inégalités

5.1 Blocs et covariances

Théorème 3 (Lebowitz, 1972) Pour $A, B \subset \{1, \dots, n\}$ et x_i ($i \in A \cup B$) réels, définissons:

$$\begin{aligned} H_{A,B} &= P(X_i > x_i, i \in A \cup B) - P(X_j > x_j, j \in A) P(X_k > x_k, k \in B) \\ H_{j,k} &= H_{\{j\}, \{k\}} = \text{Cov} \left(\mathbb{I}_{\{X_j > x_j\}}, \mathbb{I}_{\{X_k > x_k\}} \right) \end{aligned}$$

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associé, alors:

$$0 \leq H_{A,B} \leq \sum_{\substack{j \in A \\ k \in B}} H_{j,k} \quad ((x_i, i \in A \cup B) \in \mathbb{R}^{A \cup B})$$

Preuve : Fixons les x_i , $i \in A \cup B$ et posons:

$$\rho_i = \mathbb{I}_{\{X_i > x_i\}} \quad \rho_C = \prod_{i \in C} \rho_i \quad S_C = \sum_{i \in C} \rho_i \quad (C \subset \{1, \dots, n\})$$

On a clairement :

$$H_{A,B} = \text{Cov}(\rho_A, \rho_B) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{j \in A \\ k \in B}} H_{j,k} = \text{Cov}(S_A, S_B)$$

Les x_i étant fixés, ρ_A , ρ_B , S_A et S_B sont des fonctions croissantes des X_i . Il en est de même pour $S_A - \rho_A$ et $S_B - \rho_B$. Vérifions le pour $S_A - \rho_A$. Soit $j \in A$, on a la décomposition:

$$S_A - \rho_A = \sum_{\substack{l \in A \\ l \neq j}} \rho_l + \rho_j \left(1 - \prod_{\substack{l \in A \\ l \neq j}} \rho_l\right)$$

Dans cette décomposition, le premier terme ne dépend pas de X_j , le deuxième est le produit de ρ_j , fonction croissante de X_j par un facteur positif ne dépendant pas de X_j donc $S_A - \rho_A$ est bien une fonction croissante de X_j . Il suffit maintenant de remarquer que :

$$\text{Cov}(S_A, S_B) = \text{Cov}(S_A - \rho_A, S_B) + \text{Cov}(\rho_A, S_B - \rho_B) + \text{Cov}(\rho_A, \rho_B)$$

L'association de X et la croissance des fonctions de X intervenant dans cette formule entraînent: $\text{Cov}(S_A, S_B) \geq \text{Cov}(\rho_A, \rho_B)$. ■

5.2 Fonctions de répartition et queues des lois associées

Théorème 4 (Esary, Proschan, Walkup, 1967) *Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associée, pour tout $A \subset \{1, \dots, n\}$ on a:*

$$(i) \quad P(X_i \leq x_i, i \in A) \geq \prod_{i \in A} P(X_i \leq x_i)$$

$$(ii) \quad P(X_i > x_i, i \in A) \geq \prod_{i \in A} P(X_i > x_i)$$

Preuve : Avec ρ_i défini comme ci dessus, (ii) s'écrit:

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i \in A} \rho_i \right) \geq \prod_{i \in A} \mathbb{E} \rho_i$$

On se ramène au cas où $A = \{1, \dots, k\}$ ($k \leq n$). Alors par association:

$$\mathbb{E} \left(\rho_k \prod_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) - \mathbb{E} \rho_k \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) = \text{Cov} \left(\rho_k, \prod_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) \geq 0$$

et on itère cet argument jusqu'à épuisement des facteurs. L'inégalité (i) s'obtient de la même façon en remplaçant les ρ_i par les $\rho'_i = 1 - \rho_i$ qui sont des fonctions décroissantes de X . ■

5.3 Inégalité de Newman

L'inégalité que nous présentons maintenant permet de majorer la différence entre la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire associé $X = (X_1, \dots, X_n)$ et ce qu'elle vaudrait si les composantes de X étaient indépendantes. C'est la clé des propriétés de normalité asymptotique pour l'association. Nous commençons par un lemme qui traite le cas $n = 2$.

Lemme 3 *Si les variables aléatoires réelles U et V sont associées, on a :*

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \mathbb{E}\left(e^{isU+itV}\right) - \mathbb{E}\left(e^{isU}\right) \mathbb{E}\left(e^{itV}\right) \right| \leq |st| \text{Cov}(U, V)$$

Preuve : En utilisant une technique d'intégration par parties sur \mathbb{R}^2 (voir annexe), on obtient:

$$\text{Cov}\left(e^{isU}, e^{itV}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} ise^{isx} ite^{ity} (P(U > x, V > y) - P(U > x)P(V > y)) dx dy$$

D'où le résultat en utilisant le lemme d'Hoeffding. ■

Théorème 5 (Newman, 1980) *Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur associé. Pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\left| \varphi(t_1, \dots, t_n) - \prod_{j=1}^n \varphi_j(t_j) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \neq k}} |t_j t_k| \text{Cov}(X_j, X_k)$$

où l'on a posé $\varphi_j(t_j) = \mathbb{E}(\exp(it_j X_j))$ et $\varphi(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{j=1}^n t_j X_j\right)\right)$.

Preuve : On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 2$ se réduit au lemme 3. Supposons l'inégalité de Newman vraie jusqu'au rang $n - 1$. On partage $\{1, \dots, n\}$ en deux sous ensembles non vides A et B définis comme suit:

1. Si tous les t_j , $1 \leq j \leq n$ ont même signe, $A = \{1, \dots, n - 1\}$, $B = \{n\}$.
2. Sinon, $A = \{j \in \{1, \dots, n\}, t_j < 0\}$, $B = \{j \in \{1, \dots, n\}, t_j \geq 0\}$.

Pour $C \subset \{1, \dots, n\}$, définissons : $\varphi_C(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{j \in C} t_j X_j\right)\right)$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \varphi - \prod_{j=1}^n \varphi_j \right| &\leq \left| \varphi - \varphi_A \varphi_B \right| + |\varphi_A| \cdot \left| \varphi_B - \prod_{j \in B} \varphi_j \right| + \left| \prod_{j \in B} \varphi_j \right| \cdot \left| \varphi_A - \prod_{j \in A} \varphi_j \right| \\ &\leq \left| \varphi - \varphi_A \varphi_B \right| + \left| \varphi_B - \prod_{j \in B} \varphi_j \right| + \left| \varphi_A - \prod_{j \in A} \varphi_j \right| \end{aligned}$$

Dans ce majorant, les deux derniers termes relèvent de l'hypothèse de récurrence. Le premier terme est contrôlé par le lemme 3: on prend $U = \sum_{j \in A} |t_j| X_j$, $V = \sum_{j \in B} |t_j| X_j$ en notant que les variables aléatoires U et V sont associées comme combinaisons linéaires à coefficients positifs de variables associées. On choisit $s = \pm 1$ et $t = \pm 1$ selon le cas 1 ou 2 et le signe des t_j . L'inégalité de Newman au rang n découle immédiatement de cette majoration. ■

5.4 Association et maxima des sommes partielles

Théorème 6 (Newman, Wright 1982) *Soient X_1, \dots, X_m des variables aléatoires réelles associées, centrées et de carré intégrable. Notons $S_i = \sum_{1 \leq j \leq i} X_j$ et $M_m = \max(S_1, \dots, S_m)$. Alors on a : $E(M_m^2) \leq \text{Var}(S_m)$.*

Corollaire 1 *Sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \alpha\right) \leq \frac{2}{\alpha^2} \text{Var}(S_m)$$

Cette inégalité est au facteur 2 près l'inégalité de Kolmogorov pour des variables indépendantes.

Preuve : On procède par récurrence. Le théorème est trivialement vérifié pour $m = 1$. Supposons le vrai pour $m - 1$ variables. Définissons:

$$\begin{aligned} K_m &= \min(X_2 + \dots + X_m, X_3 + \dots + X_m, \dots, X_m, 0) \\ L_m &= \max(X_2, X_2 + X_3, \dots, X_2 + \dots + X_m) \\ J_m &= \max(0, L_m) \end{aligned}$$

Notons pour alléger les écritures, t_i ($i = 1, \dots, m$) les arguments de la fonction min dans la définition de K_m dans leur ordre d'apparition: $t_1 = X_2 + \dots + X_m, \dots, t_m = 0$. Notons de même $s_1 = 0$ et s_i ($i = 2, \dots, m$) les arguments de la fonction max dans la définition de L_m . En remarquant que $t_i = t_1 - s_i$ ($i = 1, \dots, m$), on a :

$$\min_{1 \leq i \leq m} t_i = t_1 - \max_{1 \leq i \leq m} s_i \quad \text{soit} \quad K_m = X_2 + \dots + X_m - J_m.$$

Il est clair que K_m est une fonction croissante des X_i , donc par association: $\text{Cov}(X_1, K_m) \geq 0$. Remarquons enfin que $J_m^2 \leq L_m^2$ et $M_m = X_1 + J_m$. On a donc:

$$E(M_m^2) = E(X_1 + J_m)^2 = \text{Var} X_1 + 2\text{Cov}(X_1, J_m) + E(J_m^2)$$

En utilisant la relation $J_m = X_2 + \dots + X_m - K_m$ et les remarques ci dessus, il vient:

$$\begin{aligned} E(M_m^2) &= \text{Var} X_1 + 2\text{Cov}(X_1, X_2 + \dots + X_m) - 2\text{Cov}(X_1, K_m) + E(J_m^2) \\ &\leq \text{Var} X_1 + 2\text{Cov}(X_1, X_2 + \dots + X_m) + E(L_m^2) \end{aligned}$$

Et par hypothèse de récurrence, on a $E(L_m^2) \leq \text{Var}(X_2 + \dots + X_m)$ d'où la conclusion. ■

Remarque: On peut adapter la démonstration précédente pour prouver que $E S_{(j)}^2 \leq \text{Var}(S_m)$ où $S_{(j)}$ est la j ème statistique d'ordre du vecteur (S_1, \dots, S_m) . Ce résultat n'est pas un simple corollaire du théorème car on peut avoir $S_{(j)}^2 > M_m^2$ ($S_{(j)}$ pouvant prendre des valeurs négatives).

6 Une loi forte des grands nombres

Théorème 7 (Birkel, 1988) *Soit $(X_j, j \geq 1)$ une suite associée de variables aléatoires réelles de carré intégrable. On suppose:*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \text{Cov}(X_j, S_j) < +\infty \quad (3)$$

Alors $\frac{1}{n}(S_n - E S_n)$ converge presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si la suite $(X_j, j \geq 1)$ est de plus strictement stationnaire, on a la même conclusion en remplaçant (3) par l'hypothèse plus faible:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Cov}(X_1, S_n) = 0 \quad (4)$$

A titre de comparaison, rappelons que dans le cas d'une suite indépendante non stationnaire, l'hypothèse de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov est:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \text{Var}(X_j) < +\infty$$

Preuve : Sans perte de généralité on peut supposer les X_j centrées : le centrage conserve l'association et n'affecte pas l'hypothèse (3). Il s'agit alors de montrer la convergence presque sûre vers 0 de $n^{-1}S_n$. On opère en deux temps:

- (a) On montre que la sous-suite $2^{-n}S_{2^n}$ converge p.s. vers 0.
- (b) On montre ensuite que $2^{-n} \max_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}|$ converge p.s. vers 0.

Cela entraînera la conclusion puisque pour $k > 2^n$ on a:

$$\left| \frac{S_k}{k} - \frac{S_{2^n}}{2^n} \right| = \frac{|2^n(S_k - S_{2^n}) - (k - 2^n)S_{2^n}|}{k2^n} \leq \frac{|S_k - S_{2^n}|}{2^n} + \frac{|S_{2^n}|}{2^n}$$

Vérification de (a): Il suffit de montrer que: $\sum_{n=1}^{+\infty} P(2^{-n}|S_{2^n}| \geq \varepsilon) < +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. On commence par une majoration élémentaire de la variance:

$$\text{Var } S_{2^n} = \sum_{j,k=1}^{2^n} \text{Cov}(X_j, X_k) \leq 2 \sum_{j=1}^{2^n} \text{Cov}(X_j, S_j) \quad (5)$$

L'inégalité de Tchebycheff et (5) nous donnent alors:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(2^{-n}|S_{2^n}| \geq \varepsilon) &\leq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq j \leq 2^n}} 4^{-n} \text{Cov}(X_j, S_j) \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^* : 2^n \geq j} 4^{-n} \right) \text{Cov}(X_j, S_j) \end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\sum_{k \geq k_0} 4^{-k} = \frac{4}{3} 4^{-k_0} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^* : 2^n \geq j} 4^{-n} = \sum_{n \geq \log_2 j} 4^{-n} \leq \frac{4}{3} 4^{-\log_2 j} = \frac{4}{3} j^{-2}.$$

En utilisant l'hypothèse (3), on obtient:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(2^{-n}|S_{2^n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{8}{3\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \text{Cov}(X_j, S_j) < +\infty$$

Vérification de (b): En utilisant l'inégalité de Kolmogorov généralisée aux variables associées (corollaire 1), il vient:

$$P\left(2^{-n} \max_{2^n < k < 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2 4^n} \text{Var}(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \leq \frac{2}{\varepsilon^2 4^n} \text{Var}(S_{2^{n+1}})$$

la dernière majoration étant due à la positivité des $\text{Cov}(X_j, X_k)$ par association. On a alors:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(2^{-n} \max_{2^n < k < 2^{n+1}} |S_k - S_{2^n}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{8}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \text{Var}(S_{2^{n+1}}) < +\infty$$

en reprenant la majoration faite au (a). ■

7 Théorème central limite

Théorème 8 (Newman, 1980) *Soit $(X_j, j \geq 1)$ une suite associée strictement stationnaire de variables aléatoires réelles de carré intégrable vérifiant:*

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_1) + 2 \sum_{j=2}^{+\infty} \text{Cov}(X_1, X_j) < +\infty \quad (6)$$

Alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - \text{E} X_j)$ converge en loi vers Z , gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Preuve : Sans perte de généralité, on se ramène au cas où les X_j sont centrées. L'idée est de découper S_n en blocs de même longueur fixée et de les traiter comme s'ils étaient indépendants. L'erreur ainsi commise sur les fonctions caractéristiques sera contrôlée à l'aide de l'inégalité de Newman. Nous notons:

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Fixons une longueur de blocs $l \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de blocs $m = \lceil \frac{n}{l} \rceil$ tendra vers l'infini avec n . On commence par contrôler le reliquat dû au découpage en blocs:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) - \varphi_{ml}(t) &\leq \mathbb{E} \left| \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n\right) - \exp\left(\frac{it}{\sqrt{ml}} S_{ml}\right) \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left(|t| \cdot \left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_{ml}}{\sqrt{ml}} \right| \right) \leq |t| \operatorname{Var}^{1/2} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_{ml}}{\sqrt{ml}} \right) \\ &= |t| \cdot \left\| \sum_{j=1}^{ml} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{ml}} \right) X_j + \sum_{j=ml+1}^n \left(-\frac{1}{\sqrt{ml}} \right) X_j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |t| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{ml}} \right) \left\| \sum_{j=1}^{ml} X_j \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{|t|}{\sqrt{ml}} \left\| \sum_{j=ml+1}^n X_j \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En majorant par σ^2 la somme de chaque ligne des matrices de covariance de (X_1, \dots, X_{ml}) et (X_{ml+1}, \dots, X_n) , on voit que:

$$\left\| \sum_{j=1}^{ml} X_j \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma \sqrt{ml} \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{j=ml+1}^n X_j \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma \sqrt{n - ml} \leq \sigma \sqrt{l}$$

d'où la majoration:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{ml}(t)| \leq |t| \sigma \left(1 - \sqrt{\frac{ml}{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad (7)$$

Passons maintenant au traitement des blocs. On découpe S_{ml} en m blocs de longueur l que l'on renormalise par leur longueur:

$$Y_k^l = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{(k-1)l < j \leq kl} X_j \quad (k = 1, \dots, m)$$

ce qui nous permet d'écrire:

$$\frac{S_{ml}}{\sqrt{ml}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m Y_k^l$$

Les variables Y_k^l sont associées comme fonctions croissantes des X_j . De plus elles ont même loi en raison de la stationnarité stricte des X_j . En particulier on a : $E(\exp itY_k^l) = E(\exp itY_1^l) = \varphi_l(t)$. On utilise alors l'inégalité de Newman pour approximer φ_{ml} par ce qu'elle vaudrait si les Y_k^l étaient indépendantes:

$$\left| \varphi_{ml}(t) - \varphi_l^m\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right) \right| \leq \frac{t^2}{2m} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \text{Cov}(Y_j^l, Y_k^l)$$

En développant les $\text{Cov}(Y_j^l, Y_k^l)$, on trouve le produit de $\frac{1}{l}$ par la somme de tous les termes de la matrice de covariance de (X_1, \dots, X_{ml}) sauf ceux qui sont dans les m carrés diagonaux de côté l :

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \text{Cov}(Y_j^l, Y_k^l) = \frac{1}{l} (\text{Var } S_{ml} - m \text{Var } S_l)$$

d'où

$$\left| \varphi_{ml}(t) - \varphi_l^m\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right) \right| \leq \frac{t^2}{2} \left(\text{Var}\left(\frac{S_{ml}}{\sqrt{ml}}\right) - \text{Var}\left(\frac{S_l}{\sqrt{l}}\right) \right) \quad (8)$$

Par un calcul classique:

$$\frac{1}{n} \text{Var } S_n \longrightarrow \sigma^2 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad (9)$$

Définissons $\sigma_l > 0$ par $\sigma_l^2 = \text{Var}(l^{-1/2}S_l)$. Le théorème central limite pour des variables indépendantes et de même loi nous donne:

$$\left| \varphi_l^m\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right) - \exp\left(\frac{-t^2\sigma_l^2}{2}\right) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } m \longrightarrow +\infty \quad (10)$$

Enfin:

$$\left| \exp\left(\frac{-t^2\sigma^2}{2}\right) - \exp\left(\frac{-t^2\sigma_l^2}{2}\right) \right| \leq \frac{t^2}{2}(\sigma - \sigma_l) \quad (11)$$

Donc compte tenu de (7), (8), (9), (10), (11) et toujours pour l fixé, on a:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \varphi_n(t) - \exp\left(\frac{-t^2\sigma^2}{2}\right) \right| \leq t^2(\sigma - \sigma_l) \quad (12)$$

Le premier membre de (12) ne dépendant pas de l , on conclut grâce à (9) en faisant tendre l vers $+\infty$. ■

8 Annexe: intégration par parties

Nous donnons maintenant en détail la formule d'intégration par parties sur \mathbb{R}^2 qui a été utilisée dans la preuve du lemme 3.

Lemme 4 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^2 ayant des dérivées partielles d'ordre 2 continues et bornées sur \mathbb{R}^2 . Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable. Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)(P_{X,Y} - P_X \otimes P_Y)(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v)H(u, v) dudv$$

où :

$$\begin{aligned} H(u, v) &= P(X > u, Y > v) - P(X > u)P(Y > v) \\ &= (P_{X,Y} - P_X \otimes P_Y)(]u, +\infty[\times]v, +\infty[) \end{aligned}$$

Preuve : Posons $\mu = P_{X,Y} - P_X \otimes P_Y$ et désignons par $|\mu|$ la mesure de variation totale de cette mesure signée. Les hypothèses faites sur f entraînent l'existence d'une constante C telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq C(1 + x^2 + y^2) \quad (13)$$

Comme $E X^2$ et $E Y^2$ sont finis, on en déduit que f est $|\mu|$ -intégrable sur \mathbb{R}^2 et par convergence dominée que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mu(dx, dy) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_{D_{a,b}} f(x, y) \mu(dx, dy) \quad (14)$$

où l'on a posé : $D_{a,b} =]a, +\infty[\times]b, +\infty[$. D'autre part, on a facilement :

$$f(x, y) = f(a, y) + f(x, b) - f(a, b) + \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) dudv$$

Posons pour alléger les écritures

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_{D_{a,b}} (f(a, y) + f(x, b) - f(a, b)) \mu(dx, dy) \\ J(a, b) &= \int_{D_{a,b}} \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) dudv \mu(dx, dy) \end{aligned}$$

Première étape : on montre que $\lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, -\infty)} I(a, b) = 0$. Pour cela, on part de la décomposition: $I(a, b) = I_1(a, b) + I_2(a, b) - I_3(a, b)$ où :

$$\begin{aligned} I_1(a, b) &= E [f(a, Y) \mathbb{I}_{\{Y > b\}} (\mathbb{I}_{\{X > a\}} - P(X > a))] \\ I_2(a, b) &= E [f(X, b) \mathbb{I}_{\{X > a\}} (\mathbb{I}_{\{Y > b\}} - P(Y > b))] \\ I_3(a, b) &= f(a, b) [P(X > a, Y > b) - P(X > a)P(Y > b)] \end{aligned}$$

Contrôle de $I_1(a, b)$: D'après (13), on a $|f(a, Y)| \leq C(1 + a^2 + Y^2)$. Comme Y est de carré intégrable, par convergence dominée on a :

$$E [(1 + Y^2) \mathbb{I}_{\{Y > b\}} | \mathbb{I}_{\{X > a\}} - P(X > a)] \longrightarrow 0, \text{ quand } (a, b) \rightarrow (-\infty, -\infty) \quad (15)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [a^2 \mathbb{I}_{\{Y > b\}} | \mathbb{I}_{\{X > a\}} - P(X > a)] &\leq a^2 \mathbb{E} | \mathbb{I}_{\{X > a\}} - P(X > a) | \\ &\leq a^2 \mathbb{E} | \mathbb{I}_{\{X \leq a\}} - P(X \leq a) | \\ &\leq 2a^2 P(X \leq a) \end{aligned}$$

Or pour $a \leq 0$, $a^2 P(X \leq a) \leq \mathbb{E}(X^2 \mathbb{I}_{\{X \leq a\}})$ et ce majorant tend vers 0 par convergence dominée. On a donc:

$$\mathbb{E} [a^2 \mathbb{I}_{\{Y > b\}} | \mathbb{I}_{\{X > a\}} - P(X > a)] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } (a, b) \rightarrow (-\infty, -\infty) \quad (16)$$

La convergence vers 0 de $I_1(a, b)$ résulte de (15) et (16). On a clairement le même résultat pour $I_2(a, b)$.

Contrôle de $I_3(a, b)$: On remarque que:

$$P(X > a, Y > b) - P(X > a)P(Y > b) = P(X \leq a, Y \leq b) - P(X \leq a)P(Y \leq b)$$

puis que:

$$|P(X \leq a, Y \leq b) - P(X \leq a)P(Y \leq b)| \leq 2 \min(P(X \leq a); P(Y \leq b))$$

En utilisant à nouveau (13), on majore $C^{-1}I_3(a, b)$ par:

$$P(X \leq a, Y \leq b) - P(X \leq a)P(Y \leq b) + 2[a^2 P(X \leq a) + b^2 P(Y \leq b)]$$

qui tend bien vers 0 quand a et b tendent vers $-\infty$.

Deuxième étape: On calcule $J(a, b)$. Comme $\mathbb{E} |(X - a)(Y - b)| < +\infty$, on a :

$$\int_{D_{a,b}} |(x - a)(y - b)| \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right\|_{\infty} |\mu|(dx, dy) < +\infty$$

Notons de plus que:

$$\forall (u, v) \in D_{a,b}, \quad \mathbb{I}_{]a, x[\times]b, y[}(u, v) = \mathbb{I}_{]u, +\infty[\times]v, +\infty[}(x, y)$$

On peut alors appliquer le théorème de Fubini dans la définition de $J(a, b)$ ce qui donne:

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \int_{D_{a,b}} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) \int_{D_{a,b}} \mathbb{I}_{]u, +\infty[\times]v, +\infty[}(x, y) \mu(dx, dy) dudv \\ &= \int_{D_{a,b}} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{]u, +\infty[\times]v, +\infty[}(x, y) \mu(dx, dy) dudv \\ &= \int_{D_{a,b}} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) H(u, v) dudv \end{aligned}$$

Troisième étape: En revenant à la preuve du lemme d'Hoeffding, il est facile de

vérifier que (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) étant deux copies indépendantes de (X, Y) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |P(X > u, Y > v) - P(X > u)P(Y > v)| dudv \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} |(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)| < +\infty$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure:

$$J(a, b) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) H(u, v) dudv \quad \text{quand } (a, b) \rightarrow (-\infty, -\infty)$$

■

References

- [1] A.-H. N. AHMED, R. LEÓN, F. PROSCHAN. Generalized association, with applications in multivariate statistics. *Ann. Statist.* 9 (1981), 168–176.
- [2] R. BARLOW, F. PROSCHAN *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Holt, Rinehart and Winston, New York (1975).
- [3] T. BIRKEL. A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables. *Stat. Probab. Letters* 7 (1989), 17–20.
- [4] T. BIRKEL. A functional central limit theorem for positively dependent random variables, *J. Multiv. Anal.* 44 (1993), 314–320.
- [5] J. ESARY, F. PROSCHAN, D. WALKUP. Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.* 38 (1967), 1466–1474.
- [6] C. FORTUIN, P. KASTELEYN, J. GINIBRE. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.* 22 (1971), 89–103.
- [7] J. LEBOWITZ. Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems. *Comm. Math. Phys.* 28 (1972), 313–321.
- [8] C. LEFÈVRE, X. MILHAUD. On the association of the lifelengths of components subjected to a stochastic environment. *Adv. Appl. Prob.* 22 (1990), 961–964.
- [9] E. LEHMAN. Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* 37 (1966), 1137–1153.
- [10] C. NEWMAN. Normal fluctuations and the FKG inequalities. *Comm. Math. Phys.* 74 (1980), 119–128.
- [11] C. NEWMAN. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables, in *Inequalities in Statistics and Probability*, IMS Lect. Notes - Monograph Series 5(1984), 127-140.

- [12] C. NEWMAN, A. WRIGHT. An invariance principle for certain dependent sequences. *Ann. Probab.* 9 (1981), 671–675.
- [13] L.D. PITT. Positively correlated normal variables are associated, *Ann. Probab.* 10 (1982), 496-499.
- [14] T. WOOD. A Berry-Esséen theorem for associated random variables. *Ann. Probab.* 11 (1983), 1042–1047.
- [15] H. YU. A Glivenko-Cantelli lemma and weak convergence for empirical processes of associated sequences, *Probab. Theory Relat. Fields* 95 (1993), 357-370.