

# Principe d'invariance hölderien pour des tableaux triangulaires de variables aléatoires\*

Alfредas RAČKAUSKAS

Vilnius University and Institute of Mathematics and Informatics  
Department of Mathematics, Vilnius University  
Naugarduko 24, Lt-2006 Vilnius, Lithuania

Charles SUQUET

Université des Sciences et Technologies de Lille  
Mathématiques Appliquées, F.R.E. CNRS 2222  
Bât. M2, U.F.R. de Mathématiques  
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

## Abstract

This paper extends Hölderian invariance principle by Lamperti (1962) to the case of partial sums processes based on a triangular array of row-wise independent random variables. As an application, necessary and sufficient conditions are obtained for the almost sure (resp. in probability) weak Hölder convergence of partial sums processes based on bootstrapped samples.

## Résumé

Cet article généralise le principe d'invariance hölderien de Lamperti (1962) au cas des processus de sommes partielles construits sur un tableau triangulaire de variables aléatoires. En application, on établit des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence hölderienne en loi presque sûre ou en probabilité des processus de sommes partielles construits sur les échantillons « bootstrapés ».

**Keywords :** bootstrap, functional central limit theorem, Hölder space, invariance principle, triangular array.

---

\*Prépublication, recherche effectuée dans le cadre de l'accord CNRS/LITUANIE (4714)

## 1 Introduction

Le principe d’invariance ou théorème limite central fonctionnel classique énonce la convergence en loi d’un processus de sommes partielles  $\xi_n$  vers le mouvement brownien  $W$ . Lorsque les trajectoires de  $\xi_n$  sont des lignes polygonales, le cadre topologique habituel pour cette convergence est l’espace  $C[0, 1]$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , muni de la norme du supremum. Or les trajectoires de  $\xi_n$  et celles de  $W$  ayant une régularité supérieure à la seule continuité, il peut être tentant d’utiliser comme support des trajectoires un sous-espace de  $C[0, 1]$  muni d’une topologie plus fine. Dans cette perspective, la première alternative à considérer est indubitablement l’échelle des espaces de Hölder  $\mathcal{H}_\alpha^o$  d’exposant  $0 < \alpha < 1/2$ , la borne  $1/2$  étant clairement imposée par la régularité de  $W$  (pour la définition de  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , cf. la section 2). La question dépasse la simple curiosité théorique. En effet ce renforcement de la topologie fournit davantage de fonctionnelles continues des trajectoires, élargissant ainsi le domaine d’applications du principe d’invariance. Ceci se révèle utile dans certaines applications statistiques, en particulier pour la détection fine de ruptures de type épidémique [13, 14].

Le premier principe d’invariance hölderien est dû à Lamperti [6] et traite le cas du processus polygonal  $\xi_n$  de sommets  $(k/n, n^{-1/2}S_k)$  où  $S_k := X_1 + \dots + X_k$  et les  $X_i$  sont i.i.d. centrées. Sous l’hypothèse de finitude de  $\mathbf{E}|X_1|^p$  pour un  $p > 2$ , Lamperti établit la convergence en loi de  $\xi_n$  vers  $W$  dans tous les  $\mathcal{H}_\alpha^o$  pour  $0 < \alpha < 1/2 - 1/p$ . Pour tester l’optimalité de sa condition de moment, Lamperti considère le cas d’une variable aléatoire symétrique  $X_1$  telle que  $\mathbf{P}\{X_1 \geq u\} = cu^{-p(\alpha)}$ ,  $u \geq 1$  où  $p(\alpha)$  est l’exposant critique défini par

$$p(\alpha) := \frac{1}{1/2 - \alpha}. \quad (1)$$

Il montre alors que la suite  $(\xi_n)$  n’est pas équitendue dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ .

Le théorème de Lamperti a été redémontré par Kerkycharian et Roynette [5] en utilisant une autre méthode basée sur des résultats de Ciesielski [2] permettant l’analyse des espaces de Hölder comme espaces de suites à partir de leur décomposition sur la base des fonctions triangulaires. Erickson [3] a étudié le cas des processus de sommes partielles indexés par  $[0, 1]^d$ , Hamadouche [4] celui des suites stationnaires faiblement dépendantes  $(X_n)$ . Les auteurs ont étendu dans [9] le principe d’invariance de Lamperti au cas d’une suite i.i.d.  $(X_n)$  d’éléments aléatoires d’un espace de Banach séparable  $B$  et des espaces de Hölder de fonctions  $[0, 1] \rightarrow B$  bâtis à l’aide de poids  $\rho(h) = h^\alpha \ln^\beta(1/h)$ . Par ailleurs ils ont montré [10] comment l’utilisation combinée de l’autonormalisation des sommes partielles et d’une construction adaptative des lignes polygonales permet un affaiblissement considérable de l’hypothèse de moment. Enfin ils ont donné [12] une C.N.S. pour la convergence hölderienne en loi de  $\xi_n$  vers un mouvement brownien, dans le cas où les  $X_i$  sont à valeurs dans un espace de Banach séparable  $B$  et où l’espace de Hölder concerné est construit à l’aide d’un poids de la forme  $\rho(h) = h^\alpha L(1/h)$ ,  $L$  étant une fonction à variation lente. Dans

le contexte du théorème de Lamperti, cette C.N.S s'écrit :

$$\xi_n \xrightarrow[\mathcal{H}_\alpha^o]{\text{loi}} W \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p(\alpha)} \mathbf{P}(|\xi_1| \geq t) = 0. \quad (2)$$

Tous ces travaux concernent le cas de variables  $X_k$  de même loi. Dans cet article nous abordons pour la première fois le cas des tableaux triangulaires

$$(X_{n,k}, k = 1, \dots, k_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

où les variables aléatoires d'une même ligne sont indépendantes. Nous supposons dans toute la suite que  $\mathbf{E}X_{n,k} = 0$ ,  $\sigma_{n,k}^2 := \text{var}(X_{n,k}) = \mathbf{E}X_{n,k}^2 < +\infty$  et  $\sigma_{n,k} > 0$  pour  $k = 1, \dots, k_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Posons  $S_n(0) = 0$ ,  $b_n(0) = 0$  et

$$S_n(k) = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}, \quad b_n(k) = \sigma_{n,1}^2 + \dots + \sigma_{n,k}^2,$$

pour  $k = 1, 2, \dots, k_n$ . Nous supposons aussi que  $b_n(k_n) = 1$ .

Considérons le processus  $\Xi_n(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , construit par interpolation affine entre les points  $(b_n(k), S_n(k))$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_n$  :

$$\Xi_n(t) = S_n(k-1) + \sigma_{n,k}^{-2}(t - b_n(k))X_{n,k}, \quad \text{pour } b_n(k-1) \leq t \leq b_n(k),$$

$k = 1, \dots, k_n$ . Nous étudions la convergence en loi de ce processus dans le cadre fonctionnel des espaces de Hölder  $\mathcal{H}_\alpha^o$  définis comme suit. Pour  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mathcal{H}_\alpha^o$  est l'ensemble des fonctions réelles continues  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_\alpha(x, \delta) = 0,$$

où

$$w_\alpha(x, \delta) := \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|x(t) - x(s)|}{|s - t|^\alpha}.$$

Cet ensemble  $\mathcal{H}_\alpha^o$  devient un espace de Banach séparable lorsqu'on le munit de la norme

$$\|x\|_\alpha := |x(0)| + w_\alpha(x, 1).$$

Nous nous restreignons dans tout cet article au cas  $0 < \alpha < 1/2$ .

L'article est organisé comme suit. La section 2 rappelle l'analyse des espaces de Hölder par la base des fonctions triangulaires de Schauder, menant au théorème d'équitension dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ . La section 3 concerne les résultats généraux dont les énoncés sont rassemblés dans la sous-section 3.1 et les démonstrations reportées aux sous-sections suivantes. La section 4 présente selon le même plan les applications au processus de sommes partielles construits sur les échantillons « bootstrapés ».

## 2 Préliminaires

Pour établir les principes d'invariance hölderiens, il est commode d'utiliser un procédé de discrétisation dyadique associé à la base des fonctions triangulaires de Faber-Schauder. Notons  $D_j$  l'ensemble des dyadiques de niveau  $j$  de  $[0, 1]$ , *i. e.*

$$D_0 = \{0, 1\}, \quad D_j = \{(2l-1)2^{-j}; 1 \leq l \leq 2^{j-1}\}, \quad j \geq 1$$

et  $D$  l'ensemble de tous les dyadiques de  $[0, 1]$ ,  $D = \cup_{j=0}^{\infty} D_j$ . Posons pour  $r \in D_j$ ,  $j \geq 0$ ,

$$r^- := r - 2^{-j}, \quad r^+ := r + 2^{-j}.$$

Nous indexons les fonctions triangulaires de Faber-Schauder par l'abscisse de leur sommet. Ainsi pour  $r \in D_j$ ,  $j \geq 1$ ,  $\Lambda_r$  est la fonction définie par

$$\Lambda_r(t) := \begin{cases} 2^j(t - r^-) & \text{si } t \in (r^-, r]; \\ 2^j(r^+ - t) & \text{si } t \in (r, r^+]; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Dans le cas particulier  $j = 0$ , nous prenons

$$\Lambda_0(t) := 1 - t, \quad \Lambda_1(t) := t, \quad t \in [0, 1].$$

Si  $x$  est une fonction  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définissons ses coefficients de Schauder  $\lambda_r(x)$  par

$$\lambda_r(x) := x(r) - \frac{1}{2}(x(r^+) + x(r^-)), \quad r \in D_j, \quad j \geq 1$$

et  $\lambda_r(x) := x(r)$  si  $r \in D_0$ . Il est bien connu que si  $x$  est continue sur  $[0, 1]$ , elle possède une décomposition en série de Schauder

$$x = \sum_{r \in D} \lambda_r(x) \Lambda_r, \quad (3)$$

uniformément convergente sur  $[0, 1]$ . Ciesielski [2] a montré que si  $x$  appartient à l'espace hölderien séparable  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , la convergence (3) a lieu pour la topologie forte de cet espace. De plus sur  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , la norme hölderienne originelle  $\|x\|_\alpha$  est équivalente à une norme hölderienne séquentielle :

$$\|x\|_\alpha \sim \|x\|_\alpha^{\text{seq}} := \sup_{j \geq 0} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(x)|. \quad (4)$$

Il en résulte que  $(\Lambda_r, r \in D)$  est une base de Schauder (inconditionnelle) de  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , ce qui avec l'équivalence de normes (4) nous permet de disposer du critère d'équitension suivant.

**Théorème 1.** *La suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  d'éléments aléatoires de l'espace de Hölder  $\mathcal{H}_\alpha^o$  est équitendue si et seulement si elle vérifie les deux conditions :*

- i)  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{P}\{|Z_n(0)| > u\} = 0$ ;
- ii) pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{j \geq J} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(Z_n)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Pour une preuve, nous renvoyons à [11].

### 3 Résultats généraux

#### 3.1 Énoncés

Le premier théorème limite central fonctionnel hölderien de cette section suppose l'existence de moments d'ordre  $q > 2$  et généralise le théorème de Lamperti au cas des tableaux triangulaires.

**Théorème 2.** *Si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \sigma_{n,k}^2 = 0 \quad (5)$$

et si pour un certain  $q > p(\alpha)$ , où  $p(\alpha)$  est défini par (1),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}^{-2\alpha q} \mathbf{E}|X_{n,k}|^q = 0, \quad (6)$$

alors

$$\Xi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} W \quad \text{dans l'espace } \mathcal{H}_\alpha^o. \quad (7)$$

Pour vérifier que le théorème 2 généralise celui de Lamperti, considérons le cas particulier où  $k_n = n$ ,  $X_{n,k} = n^{-1/2} X_k$ , la suite  $(X_k)$  étant i.i.d. centrée, de variance  $\mathbf{E}X_k^2 = 1$  avec  $\mathbf{E}|X_1|^q < +\infty$  pour un certain  $q > 2$ . Comme  $\sigma_{n,k}^2 = n^{-1}$ , (5) est trivialement vérifiée et (6) se réduit à la convergence vers 0 de  $n^{1-q\alpha-q/2}$ , laquelle est automatique puisque  $q > 2$ . Ainsi la seule contrainte est  $q > p(\alpha)$ . Le théorème 2 nous dit donc dans ce cas que  $\Xi_n$  converge en loi vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$  pour tout  $\alpha$  tel que  $\alpha < 1/2 - 1/q$ , ce qui est précisément le résultat de Lamperti.

Pour affaiblir la condition de moment (6) dans le théorème 2, introduisons pour tout  $\tau > 0$ , les variables aléatoires tronquées :

$$X_{n,k,\tau} := X_{n,k} \mathbf{1}\{|X_{n,k}| \leq \tau \sigma_{n,k}^{2\alpha}\}, \quad k = 1, \dots, k_n; n = 1, 2, \dots$$

**Théorème 3.** *Supposons vérifiées les conditions suivantes.*

1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_{n,k}| \geq \varepsilon \sigma_{n,k}^{2\alpha}) = 0. \quad (8)$$

2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2 \mathbf{1}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} = 0. \quad (9)$$

3. Pour un certain  $q > p(\alpha)$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}^{-2\alpha q} \mathbf{E}|X_{n,k,\tau}|^q = 0. \quad (10)$$

Alors la convergence en loi (7) a lieu.

Les conditions (8) et (10) remplacent (6) et sont évidemment plus générales. La condition de Lindeberg (9) assure que le tableau triangulaire  $(X_{n,k})$  vérifie le théorème central limite. Elle implique aussi la condition de négligibilité infinitésimale (5).

Considérons maintenant le cas plus spécifique d'un tableau triangulaire dont les lignes sont des combinaisons linéaires à coefficients déterministes d'une même suite i.i.d. Soit donc  $(X_k)$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et centrées, de variance  $\mathbf{E}X_k^2 = 1$ . Soit

$$\mathbf{a} := (a_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n, n \geq 1)$$

un tableau triangulaire de nombres réels *non nuls* vérifiant

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2 = 1. \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} a_{n,k}^2 = 0. \quad (12)$$

Notons  $\Xi_{\mathbf{a},n}$  le processus polygonal de sommes partielles bâti sur le tableau triangulaire  $(X_{n,k})$ , où

$$X_{n,k} := a_{n,k}X_k, \quad k = 1, \dots, k_n, n \geq 1.$$

**Théorème 4.** *Supposons vérifiées les conditions suivantes.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_1| \geq \varepsilon |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) = 0. \quad (13)$$

$$M := \sup_{t>0, n \geq 1} t^{p(\alpha)} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_1| \geq t |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) < +\infty. \quad (14)$$

alors

$$\Xi_{\mathbf{a},n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} W \quad \text{dans l'espace } \mathcal{H}_\alpha^o. \quad (15)$$

En outre la condition (13) est nécessaire pour la convergence (15).

**Corollaire 5.** *Supposons que le tableau triangulaire  $\mathbf{a}$  vérifie (11), que la suite  $(k_n)_{n \geq 1}$  soit croissante, telle que*

$$\sup_{n \geq 1} \frac{k_{n+1}}{k_n} < +\infty \quad (16)$$

et que

$$\forall n \geq 1, \forall k = 1, \dots, k_n, \quad \frac{\beta}{k_n} \leq a_{n,k}^2 \leq \frac{\gamma}{k_n}, \quad (17)$$

pour des constantes strictement positives  $\beta, \gamma$ . Alors  $\Xi_{\mathbf{a},n}$  converge en loi vers  $W$  dans l'espace  $\mathcal{H}_\alpha^o$  si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p(\alpha)} \mathbf{P}(|X_1| \geq t) = 0. \quad (18)$$

Ce corollaire généralise la C.N.S. (2).

### 3.2 Preuve du théorème 2

Remarquons d'abord que la condition (5) donne la négligibilité infinitésimale de  $(X_{n,k})$ . Comme  $q > p(\alpha) > 2$ , on dispose de l'inégalité élémentaire

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{n,k}^2 \mathbf{1}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k}|^q. \quad (19)$$

Compte-tenu de (5), la condition (6) donne immédiatement la convergence vers 0 de  $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k}|^q$ , laquelle implique avec (19) la condition de Lindeberg :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E} X_{n,k}^2 \mathbf{1}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Le tableau triangulaire  $(X_{n,k})$  vérifie donc le théorème limite central et le théorème limite central fonctionnel classique (cf. [1]), à savoir

$$\Xi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} W \quad \text{dans l'espace } C[0, 1].$$

Ceci nous donne en particulier la convergence des lois de dimension finie du processus  $\Xi_n$ .

Pour prouver l'équitension de  $(\Xi_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , nous utilisons le théorème 1. Puisque  $\Xi_n(0) = 0$  nous devons seulement vérifier la seconde condition de ce théorème. Pour cela il nous faut prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(J, n, \varepsilon) = 0, \quad (20)$$

où

$$P(J, n, \varepsilon) := \mathbf{P} \left\{ \sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{r \in \mathcal{D}_j} |\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)| \geq \varepsilon \right\}.$$

Le traitement des différences  $|\Xi_n(r^+) - \Xi_n(r)|$  est bien entendu tout à fait similaire et sera omis.

Définissons pour  $t \in [0, 1]$ ,

$$u(t) := \max\{k \geq 0 : b_n(k) \leq t\},$$

ce qui nous fournit l'encadrement

$$\forall t \in [0, 1], \quad b_n(u(t)) \leq t < b_n(u(t) + 1). \quad (21)$$

Pour alléger les écritures, nous posons

$$Y_n := \max_{1 \leq k \leq k_n} \sigma_{n,k}^{-2\alpha} |X_{n,k}|.$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons

$$\Xi_n(t) = S_n(u(t)) + \frac{t - b_n(u(t))}{b_n(u(t) + 1) - b_n(u(t))} X_{n, u(t)+1}. \quad (22)$$

Soit  $r \in D_j$ . Pour majorer  $|\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)|$ , nous allons considérer les trois configurations possibles de  $r^-$  et  $r$ , relativement aux intervalles de la subdivision engendrée par les  $b_n(k)$ . Les points  $r^-$  et  $r$  sont soit dans le même intervalle (cas 1), soit dans des intervalles adjacents (cas 2), soit séparés par au moins un intervalle de la subdivision (cas 3).

*Cas 1*,  $u(r) = u(r^-)$ . Alors clairement  $2^{-j} \leq \sigma_{n,u(r)+1}^2$  et

$$|\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)| = \sigma_{u(r)+1}^{-2} (r - r^-) |X_{n,u(r)+1}| \leq Y_n 2^{-j\alpha}.$$

*Cas 2*,  $u(r) = u(r^-) + 1$ . Alors  $b_n(u(r^-)) \leq r^- < b_n(u(r)) \leq r < b_n(u(r) + 1)$ . L'identité (22) nous permet d'écrire dans ce cas :

$$\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-) = \frac{r - b_n(u(r))}{\sigma_{n,u(r)+1}^2} X_{n,u(r)+1} + \frac{b_n(u(r)) - r^-}{\sigma_{n,u(r)}^2} X_{n,u(r)}. \quad (23)$$

Remarquons que dans cette configuration, le rapport  $(r - b_n(u(r)))/\sigma_{n,u(r)+1}^2$  est un réel de  $[0, 1]$  et son numérateur  $r - b_n(u(r))$  est majoré par  $r - r^- = 2^{-j}$ . L'exposant  $\alpha$  étant inférieur à 1, on en déduit :

$$\frac{r - b_n(u(r))}{\sigma_{n,u(r)+1}^2} \leq \left( \frac{r - b_n(u(r))}{\sigma_{n,u(r)+1}^2} \right)^\alpha \leq 2^{-j\alpha} \sigma_{n,u(r)+1}^{-2\alpha}. \quad (24)$$

On obtient de même

$$\frac{b_n(u(r)) - r^-}{\sigma_{n,u(r)}^2} \leq 2^{-j\alpha} \sigma_{n,u(r)}^{-2\alpha}. \quad (25)$$

Rassemblant (23), (24) et (25) nous arrivons pour le cas 2 à la majoration :

$$|\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)| \leq 2^{1-j\alpha} Y_n.$$

*Cas 3*,  $u(r) > u(r^-) + 1$ . L'inégalité triangulaire combinée à une nouvelle utilisation de (24) et (25) nous donne

$$|\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)| \leq |S_n(u(r)) - S_n(u(r^-) + 1)| + 2^{1-j\alpha} Y_n.$$

Ce dernier majorant étant aussi valable dans les cas 1 et 2, nous avons finalement (avec la convention  $\sum_{k \in \emptyset} \equiv 0$ ) :

$$\forall r \in D_j, \quad |\Xi_n(r) - \Xi_n(r^-)| \leq \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} X_k \right| + 2^{1-j\alpha} Y_n. \quad (26)$$

Ceci nous conduit à introduire le découpage

$$P(J, n, \varepsilon) \leq P_1(J, n, \varepsilon) + P_2(n, \varepsilon),$$

où

$$P_1(J, n, \varepsilon) := \mathbf{P} \left\{ \sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{r \in D_j} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} X_k \right| > \varepsilon/2 \right\}, \quad (27)$$

$$P_2(n, \varepsilon) := \mathbf{P} \{ |Y_n| \geq \varepsilon/4 \}. \quad (28)$$

En notant que la condition (6) donne la convergence en probabilité de  $Y_n$  vers 0, la preuve de (20) se réduit ainsi à celle de la convergence :

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} P_1(J, n, \varepsilon) = 0. \quad (29)$$

Par l'inégalité de Rosenthal, nous avons avec une constante  $c = c(q)$ ,

$$\mathbf{E} \left| \sum_{i=u(r^-)+2}^{u(r)} X_{n,k} \right|^q \leq c \left( \sum_{i=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} X_{n,k}^2 \right)^{q/2} + c \sum_{i=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} |X_{n,k}|^q.$$

En rappelant que par la définition de  $u(r)$  on a

$$\sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \sigma_{n,k}^2 \leq r - r^- = 2^{-j},$$

on aboutit facilement à

$$P_1(J, n, \varepsilon) \leq \frac{c}{\varepsilon^q} \sum_{j \geq J} 2^{(q\alpha+1-q/2)j} + \frac{2^q c}{\varepsilon^q} \sum_{j \geq J} 2^{\alpha q j} \sum_{r \in D_j} \sum_{i=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} |X_{n,k}|^q.$$

La première de ces sommes ne dépend pas de  $n$  et tend vers 0 quand  $J$  tend vers l'infini parce que  $q > p(\alpha)$ . Notons  $I(J, n, q)$  la deuxième somme de ce majorant (sans la constante  $2^q c \varepsilon^{-q}$ ). En changeant l'ordre de sommation, il vient :

$$I(J, n, q) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E} |X_{n,k}|^q \sum_{j \geq J} 2^{\alpha q j} \sum_{r \in D_j} \mathbf{1} \{ u(r^-) + 1 < k \leq u(r) \}.$$

Considérons pour  $k$  fixé l'encadrement

$$u(r^-) + 1 < k \leq u(r). \quad (30)$$

Supposons qu'il existe un  $r \in D_j$  vérifiant (30) et soit  $r'$  un autre dyadique de  $D_j$ . Si  $r' < r$ , alors  $r' < r^-$  d'où par croissance de  $u$ ,  $u(r') < u(r^-) + 1 < k$ , ce qui empêche  $r'$  de vérifier (30). Si  $r' > r$ , alors  $r'^- > r$  d'où  $k \leq u(r) \leq u(r'^-) < u(r'^-) + 1$ , ce qui empêche  $r'$  de vérifier (30). Ainsi pour  $k$  fixé, il y a *au plus un*  $r \in D_j$  vérifiant (30). Lorsque cet  $r$  existe, la définition de  $u$  nous fournit l'encadrement :

$$r^- < \sum_{i=1}^{u(r^-)+1} \sigma_{n,i}^2 < \sum_{i=1}^k \sigma_{n,i}^2 \leq \sum_{i=1}^{u(r)} \sigma_{n,i}^2 \leq r,$$

d'où l'on tire immédiatement l'inégalité  $\sigma_{n,k}^2 \leq 2^{-j}$ . Par conséquent

$$\forall k = 1, \dots, k_n, \quad \sum_{r \in \mathbb{D}_j} \mathbf{1}\{u(r^-) + 1 < k \leq u(r)\} \leq \mathbf{1}\{2^{-j} \geq \sigma_{n,k}^2\},$$

ce qui nous donne

$$\sum_{j \geq J} 2^{\alpha q j} \sum_{r \in \mathbb{D}_j} \mathbf{1}\{u(r^-) + 1 < k \leq u(r)\} \leq \frac{2^{q\alpha}}{2^{q\alpha} - 1} \sigma_{n,k}^{-2\alpha q}. \quad (31)$$

On en déduit finalement

$$\forall J \geq 1, \forall n \geq 1, \quad I(J, n, q) \leq C \sum_{k=1}^{k_n} \sigma^{-2\alpha q} \mathbf{E}|X_{n,k}|^q,$$

pour une certaine constante  $C = C(\alpha, q)$  et on conclut grâce à la condition (6).

### 3.3 Preuve du théorème 3

La convergence des lois de dimension finie de  $\Xi_n$  résulte de la condition de Lindeberg comme dans la preuve du théorème 2. Il nous reste à établir l'équitension, dont la preuve se réduit comme précédemment au contrôle asymptotique de  $P_1(J, n, \varepsilon)$  et  $P_2(n, \varepsilon)$  définis par (27) et (28). On remarque d'abord que

$$\mathbf{P}\left(Y_n \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\left(|X_{n,k}| \geq \frac{\varepsilon}{4} \sigma_{n,k}^{2\alpha}\right), \quad (32)$$

ce qui grâce à (8) entraîne la convergence de  $P_2(n, \varepsilon)$  vers 0.

Notons  $A_n := \{\max_{1 \leq k \leq k_n} |X_{n,k}| \leq \tau \sigma_{n,k}^{2\alpha}\} = \{Y_n \leq \tau\}$ . En remarquant que sur cet évènement on a  $X_{n,k} = X_{n,k,\tau}$  pour tout  $k = 1, \dots, k_n$ , on peut écrire

$$P_1(J, n, \varepsilon) \leq P'_1(J, n, \varepsilon, \tau) + \mathbf{P}(A_n^c),$$

où

$$P'_1(J, n, \varepsilon, \tau) := \mathbf{P}\left\{\sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{r \in \mathbb{D}_j} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} X_{n,k,\tau} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Par (32) et (8),  $\mathbf{P}(A_n^c)$  converge vers 0. Il nous reste à étudier le comportement asymptotique de  $P'_1(J, n, \varepsilon, \tau)$ . Avant d'appliquer comme dans la preuve précédente l'inégalité de Rosenthal, il convient de remarquer qu'à la différence des  $X_{n,k}$ , les  $X_{n,k,\tau}$  ne sont pas centrées.

Pour contrôler la contribution des  $\mathbf{E}X_{n,k,\tau}$  dans  $P'_1$ , on écrit grâce à une double application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E}X_{n,k,\tau} \right| &\leq \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} (\mathbf{E}X_{n,k}^2)^{1/2} \mathbf{P}^{1/2}(|X_{n,k}| \geq \tau \sigma_{n,k}^{2\alpha}) \\ &\leq \left[ \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \sigma_{n,k}^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_{n,k}| \geq \tau \sigma_{n,k}^{2\alpha}) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

De la définition de  $u(r)$  on tire

$$\sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \sigma_{n,k}^2 \leq r - r^- = 2^{-j}. \quad (33)$$

Par conséquent

$$\sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{r \in D_j} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} X_{n,k,\tau} \right| \leq 2^{-J(1/2-\alpha)} \left[ \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_{n,k}| \geq \tau \sigma_{n,k}^{2\alpha}) \right]^{1/2}.$$

Ce majorant est inférieur à  $\varepsilon/4$  pour  $n \geq n_0$ , où  $n_0$  dépend de  $\varepsilon$  et de  $\tau$  mais pas de  $J$ . Ainsi pour  $n \geq n_0$ , nous avons  $P_1'(J, n, \varepsilon, \tau) \leq P_1''(J, n, \varepsilon, \tau)$ , avec

$$P_1''(J, n, \varepsilon, \tau) := \mathbf{P} \left\{ \sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{r \in D_j} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} (X_{n,k,\tau} - \mathbf{E} X_{n,k,\tau}) \right| \geq \varepsilon/4 \right\}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Rosenthal qui, avec la majoration élémentaire  $\text{var} X_{n,k,\tau} \leq \mathbf{E} X_{n,k,\tau}^2$  et compte-tenu de (33), nous donne :

$$\mathbf{E} \left| \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} (X_{n,k,\tau} - \mathbf{E} X_{n,k,\tau}) \right|^q \leq c 2^{-jq/2} + c \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} |X_{n,k,\tau}|^q.$$

Nous en déduisons

$$P_1''(J, n, \varepsilon) \leq \frac{4^q c}{\varepsilon^q} \sum_{j \geq J} 2^{(q\alpha+1-q/2)j} + \frac{4^q c}{\varepsilon^q} \sum_{j \geq J} 2^{\alpha q j} \sum_{r \in D_j} \sum_{k=u(r^-)+2}^{u(r)} \mathbf{E} |X_{n,k,\tau}|^q.$$

En rappelant que  $q > p(\alpha)$  et donc  $q\alpha + 1 - q/2 < 0$  et en utilisant (31), on arrive ainsi à

$$P_1''(J, n, \varepsilon) \leq C_1 2^{(q\alpha+1-q/2)J} + C_2 \sum_{k=1}^n \sigma_{n,k}^{-2\alpha q} \mathbf{E} |X_{n,k,\tau}|^q,$$

avec des constantes  $C_1$  et  $C_2$  dépendant de  $\alpha$ ,  $q$  et  $\varepsilon$ . Notons que cette majoration est vérifiée pour tout  $\tau > 0$ . On en déduit au vu des réductions successives de l'étude de  $P(J, n, \varepsilon)$  :

$$\forall \tau > 0, \quad \limsup_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(J, n, \varepsilon) \leq C_2 \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sigma_{n,k}^{-2\alpha q} \mathbf{E} |X_{n,k,\tau}|^q.$$

Faisant tendre enfin  $\tau$  vers 0, on obtient grâce à (10)

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} P(J, n, \varepsilon) = 0,$$

ce qui achève la preuve.

### 3.4 Preuve du théorème 4

Pour établir la convergence (15), on vérifie que les  $X_{n,k} = a_{n,k}X_k$  satisfont aux conditions du théorème 3. Notons que (13) n'est que la traduction de (8) dans le cas particulier des processus  $\Xi_n = \Xi_{a,n}$ .

La condition de Lindeberg (9) découle de (11), (12) et de la finitude de  $\mathbf{E}X_1^2$  via l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2 \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{1}\{|X_1| \geq \varepsilon |a_{n,k}|^{-1}\} \leq \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{1}\{|X_1| \geq \varepsilon d_n^{1/2}\},$$

où

$$d_n := \min_{1 \leq k \leq k_n} a_{n,k}^{-2} = \left( \max_{1 \leq k \leq k_n} a_{n,k}^2 \right)^{-1}. \quad (34)$$

Pour vérifier (10), on commence par remarquer que pour toute variable aléatoire positive  $Y$  et toute constante  $c > 0$ ,

$$\mathbf{E}Y^q \mathbf{1}\{Y \leq c\} = \int_0^c qt^{q-1} \mathbf{P}(c \geq Y \geq t) dt \leq \int_0^c qt^{q-1} \mathbf{P}(X \geq t) dt. \quad (35)$$

Les variables tronquées s'écrivent ici  $X_{n,k,\tau} = a_{n,k}X_k \mathbf{1}\{|X_k| \leq \tau |a_{n,k}|^{2\alpha-1}\}$ . En appliquant (35) aux variables  $|a_{n,k}|^{1-2\alpha}|X_k|$ , on obtient avec  $q > p = p(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}^{-2\alpha q} \mathbf{E}|X_{n,k,\tau}|^q &= \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}(|a_{n,k}|^{1-2\alpha}|X_k|)^q \mathbf{1}\{|a_{n,k}|^{(1-2\alpha)}|X_k| \leq \tau\} \\ &\leq \int_0^\tau qt^{q-1} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_k| \geq t |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) dt \\ &\leq \frac{Mq}{q-p} \tau^{q-p}. \end{aligned}$$

Comme  $q > p$ , la condition (10) est bien vérifiée et ceci termine la preuve de la convergence (15).

Montrons maintenant la nécessité de (13) pour cette même convergence. Par le théorème de l'image continue, la convergence en loi de  $\Xi_{a,n}$  vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^c$  donne pour tout  $\delta > 0$  :

$$w_\alpha(\Xi_{a,n}, \delta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} w_\alpha(W, \delta). \quad (36)$$

D'après (12), on a  $\max_{1 \leq k \leq n} a_{n,k}^2 < \delta$  pour tout  $n \geq n_0(\delta)$ , ce qui nous permet de contrôler les accroissements de  $\Xi_{a,n}$  entre deux sommets consécutifs à l'aide du module de régularité hölderienne  $w_\alpha(\Xi_{a,n}, \delta)$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |a_{n,k}X_k| a_{n,k}^{-2\alpha} > u \right\} &= \mathbf{P}\left\{ \max_{0 < k \leq n} \frac{|S_n(k) - S_n(k-1)|}{a_{n,k}^{2\alpha}} > u \right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|\Xi_{a,n}(t) - \Xi_{a,n}(s)|}{|t-s|^\alpha} > u \right\} \\ &= \mathbf{P}\{w_\alpha(\Xi_{a,n}, \delta) > u\}. \end{aligned}$$

Par la convergence (36)

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_\alpha(\Xi_n, \delta) > u) \leq \mathbf{P}(w_\alpha(W, \delta) > u).$$

On en déduit que pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |a_{n,k}|^{1-2\alpha} |X_k| > u \right\} \leq \mathbf{P}(W, \delta) > u).$$

Puisque  $\mathbf{P}(w_\alpha(W, \delta) > u)$  tend vers 0 quand  $\delta$  tend 0, on en déduit compte-tenu de l'indépendance des  $X_k$  que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_k| > u |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) = 0,$$

ce qui donne (13) puisque les  $X_k$  ont même loi.

### 3.5 Preuve du corollaire 5

Afin d'établir la suffisance de (18) pour la convergence en loi de  $\Xi_{a,n}$  vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , on utilise le théorème 4. La condition (13) se vérifie en fait sous l'hypothèse (12) plus générale que (17), en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon |a_{n,k}|^{2\alpha-1}\} &= \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2 a_{n,k}^{-2} \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon (|a_{n,k}|^{-2})^{1/2-\alpha}\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2 \sup_{t \geq |a_{n,k}|^{-2}} t \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon t^{1/p(\alpha)}\} \\ &\leq \sup_{t \geq d_n} t \mathbf{P}\{|X_1| \geq \varepsilon t^{1/p(\alpha)}\} \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2, \end{aligned}$$

où  $d_n$  est défini par (34). Ce majorant tend vers zéro grâce à (11), (12) et (18). Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, (13) est vérifiée. La vérification de (14) est immédiate grâce à la condition (17), en effet :

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{p(\alpha)} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(|X_1| \geq t |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) &\leq \sup_{t>0} t^{p(\alpha)} k_n \mathbf{P}(|X_1| \geq t \beta^{\alpha-1/2} k_n^{1/p(\alpha)}) \\ &= \beta^{(1/2-\alpha)\alpha} \sup_{u>0} u^{p(\alpha)} \mathbf{P}(|X_1| \geq u). \end{aligned}$$

Pour montrer la nécessité de (18) pour la convergence en loi de  $\Xi_{a,n}$  vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , on note simplement que d'après le théorème 4, cette convergence implique la condition (13). Cette dernière jointe à la minoration

$$\sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2 a_{n,k}^{-2} \mathbf{P}(|X_1| \geq \varepsilon |a_{n,k}|^{2\alpha-1}) \geq \frac{k_n}{\gamma} \mathbf{P}(|X_1| \geq \varepsilon \beta^{\alpha-1/2} k_n^{1/p(\alpha)}) \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}^2,$$

valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous donne

$$\lim_{k_n \rightarrow +\infty} k_n \mathbf{P}(|X_1| \geq k_n^{1/p(\alpha)}) = 0.$$

Grâce à (16) et à la croissance de  $k_n$ , on en déduit facilement (18).

## 4 Application au bootstrap

Nous examinons maintenant une application des principes d'invariance hœlderiens pour les tableaux triangulaires à la convergence hœlderienne en loi de processus de sommes partielles construits sur un échantillon « bootstrapé ». Nous obtenons les C.N.S. de convergence presque-sûre ou en probabilité énoncées à la sous-section 4.1 et démontrées dans les sous-sections suivantes.

### 4.1 FCLT hœlderiens sous bootstrap

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , indépendantes, centrées et de même loi de fonction de répartition  $F$ . Nous notons  $\widehat{F}_n$  la fonction de répartition empirique correspondante. Soit  $X_1^*, \dots, X_n^*$  un échantillon « bootstrapé » de  $\widehat{F}_n$ , *i.e.* conditionnellement à  $X_1, \dots, X_n$ , les  $X_1^*, \dots, X_n^*$  sont des variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition  $\widehat{F}_n$ . Nous notons  $E^*$  l'espérance conditionnelle sachant  $X_1, \dots, X_n$ .

Posons  $S_n^*(0) := 0$ ,

$$S_n^*(t) := \widehat{\sigma}_n^{-1} \sum_{j \leq t} (X_j^* - \bar{X}_n), \quad \text{pour } 0 < t \leq n,$$

avec les notations classiques

$$\bar{X}_n := n^{-1}(X_1 + \dots + X_n) \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 := n^{-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2.$$

Considérons la ligne polygonale aléatoire  $\xi_n^*(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , de sommets les points  $(k/n, n^{-1/2} S_n^*(k))$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Cette ligne polygonale étant doublement aléatoire, il convient de préciser le mode de convergence utilisé pour l'étude de son comportement asymptotique. Notons  $d$  une distance métrisant la convergence en loi dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ . Nous dirons que  $\xi_n^*$  converge en loi en probabilité vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$  si  $d(\xi_n^*, W)$  converge en probabilité vers 0 (avec un abus de notation puisque  $d(\xi_n^*, W)$  désigne en fait la distance entre la loi de  $\xi_n^*$  et celle de  $W$ , ces deux lois étant considérées comme des mesures sur la tribu borélienne de  $\mathcal{H}_\alpha^o$ ). Nous noterons cette convergence par

$$\xi_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi-Pr}} W \quad \text{dans } \mathcal{H}_\alpha^o.$$

De même si  $d(\xi_n^*, W)$  converge  $\mathbf{P}$ -presque sûrement sur  $\Omega$  vers 0, nous dirons que  $\xi_n^*$  converge en loi presque sûrement vers  $W$  dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ , ce que nous noterons

$$\xi_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi-p.s.}} W \quad \text{dans } \mathcal{H}_\alpha^o.$$

**Théorème 6.** *La condition de moment*

$$\mathbf{E}|X_1|^{p(\alpha)} < \infty \tag{37}$$

*est nécessaire et suffisante pour la convergence*

$$\xi_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi-p.s.}} W \quad \text{dans } \mathcal{H}_\alpha^o. \tag{38}$$

**Théorème 7.** *La condition*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p(\alpha)} \mathbf{P}(|X_1| > t) = 0 \tag{39}$$

*est nécessaire et suffisante pour la convergence*

$$\xi_n^* \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi-Pr}} W \quad \text{dans } \mathcal{H}_\alpha^o. \tag{40}$$

## 4.2 Preuve du théorème 6

Pour établir la suffisance de (37), on applique le théorème 2, conditionnellement à  $X_1, \dots, X_n$ , en posant

$$X_{n,k} := n^{-1/2} \widehat{\sigma}_n^{-1} (X_k^* - \bar{X}_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ici  $\sigma_{n,k}^2 = E^* X_{n,k}^{*2} = n^{-1}$ , ce qui réduit la preuve de (38) à celle de la convergence

$$n^{q\alpha - q/2} \widehat{\sigma}_n^{-q} n E^* |X_1^* - \bar{X}_n|^q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0, \tag{41}$$

pour un  $q > p(\alpha) > 2$ . L'existence du moment d'ordre 2 de  $X_1$  étant assurée par (37), la loi forte des grands nombres nous donne :

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 1.$$

Ainsi (41) se réduit à

$$n^{q\alpha - q/2} n E^* |X_1^*|^q = n^{-q/p(\alpha)} \sum_{k=1}^n |X_k|^q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{42}$$

Par la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund, si  $(Y_k)_{k \geq 1}$  est une suite i.i.d. telle que  $\mathbf{E}|Y_1|^\beta < +\infty$  pour un  $\beta \in ]0, 1[$ , alors  $n^{-1/\beta} (Y_1 + \dots + Y_n)$  converge presque sûrement vers 0. En choisissant  $Y_k = |X_k|^q$  et  $\beta = p(\alpha)/q$ , il est alors clair que (42) est une conséquence de (37).

Supposons maintenant (38) vérifiée et montrons la nécessité de (37). D'après (38), la suite de processus  $(\xi_n^*)_{n \geq 1}$  est  $\mathbf{P}$ -presque sûrement équitendue dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ . Il en résulte [8, Th. 1.4] que

$$\text{p.s.}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} P^* \{w_\alpha(\xi_n^*, \delta) > \varepsilon\} = 0,$$

où  $P^*$  est la probabilité conditionnelle à la suite  $(X_n)$ . En particulier

$$\text{p.s.}, \quad w_\alpha(\xi_n^*, 1/n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P^*} 0.$$

En considérant les accroissements pondérés de  $\xi_n^*$  entre 2 sommets consécutifs, on en déduit :

$$\text{p.s.}, \quad \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|\xi_n^*(k/n) - \xi_n^*((k-1)/n)|}{(1/n)^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P^*} 0,$$

ce qui s'écrit aussi avec  $p = p(\alpha)$ ,

$$\text{p.s.}, \quad \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|X_k^* - \bar{X}_n|}{n^{1/p} \hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P^*} 0.$$

ou plus explicitement,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|X_k^* - \bar{X}_n|}{n^{1/p} \hat{\sigma}_n} > \varepsilon \mid X_1, \dots, X_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (43)$$

Les  $X_k^*$  étant conditionnellement à  $(X_1, \dots, X_n)$ , indépendantes et de même loi, (43) équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad n \mathbf{P}(|X_1^* - \bar{X}_n| > \varepsilon n^{1/p} \hat{\sigma}_n \mid X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (44)$$

On remarque maintenant que

$$\mathbf{P}(|X_1^* - \bar{X}_n| > \varepsilon n^{1/p} \hat{\sigma}_n \mid X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{|X_k - \bar{X}_n| > \varepsilon n^{1/p} \hat{\sigma}_n\},$$

d'où en reportant dans (44) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{|X_k - \bar{X}_n| > \varepsilon n^{1/p} \hat{\sigma}_n\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Cette somme d'indicatrices ne peut converger vers 0 que si elle est nulle à partir d'un certain rang (aléatoire), ce qui se traduit immédiatement par :

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{|X_k - \bar{X}_n|}{n^{1/p} \hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (45)$$

Vérifions maintenant que

$$\frac{|\bar{X}_n|}{n^{1/p}\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (46)$$

En notant que  $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$ , on peut minorer le dénominateur par  $n^{1/p-1/2}(X_1^2 + \dots + X_n^2)^{1/2}$ . Au numérateur l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne  $|\bar{X}_n| \leq n^{1/2}(X_1^2 + \dots + X_n^2)^{1/2}$ . Ainsi (46) résulte de la majoration

$$\frac{|\bar{X}_n|}{n^{1/p}\hat{\sigma}_n} \leq \frac{1}{n^{1/p}}.$$

De (45) et (46) on obtient immédiatement

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^2}{n^{2/p-1}(X_1^2 + \dots + X_n^2)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0. \quad (47)$$

L'inégalité de Hölder suivante

$$\sum_{k=1}^n X_k^2 \leq n^{1-2/p} \left( \sum_{k=1}^n |X_k|^p \right)^{2/p}$$

nous permet finalement de déduire de (47) la convergence

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^p}{|X_1|^p + \dots + |X_n|^p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Par le lemme 4.1 de Maller et Resnik [7] on peut alors conclure à la finitude de  $\mathbf{E}|X_1|^p$ .

### 4.3 Preuve du théorème 7

Comme dans la preuve du théorème 6, on établit la suffisance de (39) en vérifiant que

$$n^{q\alpha-q/2}\hat{\sigma}_n^{-q}nE^*|X_1^* - \bar{X}_n|^q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0, \quad (48)$$

pour un exposant  $q > p = p(\alpha)$ . Comme  $p(\alpha) > 2$ , la condition (39) implique la finitude de  $\mathbf{E}X_1^2$ . La loi faible des grands nombres nous donne alors les convergences en probabilité de  $\bar{X}_n$  vers 0 et de  $\hat{\sigma}_n^2$  vers 1 qui réduisent la preuve de (48) à celle de

$$n^{q\alpha-q/2}nE^*|X_1^*|^q = n^{-q/p} \sum_{k=1}^n |X_k|^q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0.$$

Cette dernière convergence découle de (39) par la loi faible des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund.

Supposons maintenant (40) vérifiée, autrement dit

$$d(\zeta_n^*, W) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0,$$

pour une distance  $d$  métrisant la convergence en loi dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$ . Alors de toute sous-suite d'indices  $(n') \subset (n)$  on peut extraire une sous-suite  $(n'') \subset (n')$  telle que

$$d(\xi_{n''}^*, W) \xrightarrow[n'' \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Au vu de la preuve du théorème 7, la convergence p.s. (47) est alors vérifiée pour la sous-suite indexée par  $(n'')$ . Comme la sous-suite initiale  $(n')$  était arbitraire, on en déduit

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^2}{n^{2/p-1}(X_1^2 + \dots + X_n^2)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0. \quad (49)$$

Comme  $p > 2$ , on déduit immédiatement de (49) que

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^2}{(X_1^2 + \dots + X_n^2)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0,$$

ce qui grâce au lemme 4.1 de Maller and Resnik [7] nous donne la finitude de  $\mathbf{E}|X_1|^2$ . Revenant à (49) on en déduit que

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|}{n^{1/p}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P}} 0,$$

ce qui est équivalent à (39). La preuve est ainsi complète.

## Références

- [1] ARAUJO, A., GINÉ, E. (1980), *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*. Wiley, New York.
- [2] CIESIELSKI, Z. (1960), On the isomorphisms of the spaces  $H_\alpha$  and  $m$ . *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Phys.* **8**, 217–222.
- [3] ERICKSON, R. V. (1981), Lipschitz smoothness and convergence with applications to the central limit theorem for summation processes. *Ann. Probab.* **9**, 831–851.
- [4] HAMADOUCHE, D. (2000), Invariance principles in Hölder spaces. *Portugal. Math.*, **57**, 127–151.
- [5] KERKYACHARIAN, G., ROYNETTE, B. (1991), Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. I* **312**, 877–882.
- [6] LAMPERTI, J. (1962), On convergence of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **104**, 430–435.
- [7] MALLER, R. A., RESNICK, S.I. (1984), Limiting behaviour of sums and the term of maximum modulus. *Proc. London Math. Soc.* **49** 385–422.
- [8] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch. (1999), Central limit theorem in Hölder spaces, *Probab. and Math. Statist.* **19**, 133–152.

- [9] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch., On the Hölderian functional central limit theorem for i.i.d. random elements in Banach space, *Limit Theorems in Probability and Statistics*, Balatonlelle 1999 (I. Berkes, E. Csáki, M. Csörgő, eds.) János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 2002, Vol. 2, pp. 485–498.
- [10] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch. (2001), Invariance principles for adaptive self-normalized partial sums processes. *Stochastic Process. Appl.*, **95**, 63–81.
- [11] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch., Central limit theorems in Hölder topologies for Banach space valued random fields, à paraître à *Theory of Probability and its Applications*, 2002.
- [12] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch., Necessary and sufficient condition for the Hölderian functional central limit theorem. Pub. IRMA Lille (2002), 57-I, preprint.
- [13] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch., Hölder norm test statistics for epidemic change. Pub. IRMA Lille (2002), **59-III**, preprint, à paraître dans *Journal of Statistical Planning and Inference*.
- [14] RAČKAUSKAS, A., SUQUET, Ch., Testing epidemic changes of infinite dimensional parameters. Pub. IRMA Lille (2003), **60-VIII**, preprint.